Université Paris I - Panthéon Sorbonne
Magistère II
Séries chronologiques — Année universitaire 2002-2003

Partiel 30 Mai 2003
3 heures

Exercice 1 (5 points)

La phase d'identification d'une série x_t donne les valeurs suivantes pour les autocorrélations simples estimées, $\hat{\rho}(h)$, et les autocorrélations partielles estimées, $\hat{r}(h)$:

h	1	2	3
$\hat{\rho}(h)$	0.56	0.26	0.08
$\hat{r}(h)$	0.56	-0.08	-0.05

Quelles valeurs initiales suggérez-vous pour les paramètres d'un modèle AR(2) ? (2 points); pour les paramètres d'un modèle ARMA(1,1) ? (3 points)

Exercice 2 (4 points)

On considère la moyenne mobile M définie par :

$$MX_t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}X_{t-2} + X_{t-1} + X_t + X_{t+1} + \frac{1}{2}X_{t+2}\right)$$

a) Quelles sont les composantes annulées par cette moyenne mobile ? (2 points)

Indication : *Vous remarquerez que :* $1 + 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4 = (1+\lambda)P(\lambda)$ *où* $P(\lambda)$ *est un polynôme de degré 3.*

b) Montrez que les polynômes de degré 1 sont conservés par M. (1 point)

c) Comment peut être utilisée cette moyenne mobile? (1 point)

Exercice 3 (11 points)

L'objectif de cet exercice est d'utiliser le concept économétrique de stationnarité pour étudier le concept macroéconomique de convergence des économies réelles.

La citation qui suit permet de définir la notion de convergence absolue :

> "Dans le modèle de Solow, la stabilité de l'équilibre régulier implique que deux économies qui ne différeraient ni par la technologie, ni par les comportements d'épargne, ni par la démographie, mais seulement par leur niveau de capital par tête, convergeraient l'une vers l'autre sur le même sentier régulier où elles obtiendraient le même revenu par tête" (Jacques et Rebeyrol, *Croissance et Fluctuations*, Dunod 2001)

La première partie de cet exercice est théorique, elle a pour objectif de traduire ce concept de convergence absolue en hypothèse statistiquement testable. La seconde s'intéressera plus particulièrement à la convergence du PIB par tête de plusieurs pays européens entre 1960 et 2000.

On note $y_{1,t}$ (respectivement $y_{2,t}$) le niveau du PIB par tête du pays 1 à la date t (respectivement du pays 2).

Partie 1 :

1) On note $\hat{y}_{1,t+k}$ (respectivement $\hat{y}_{2,t+k}$) la prévision, à un horizon de k périodes, du niveau du PIB par tête du pays 1 (respectivement pays 2) conditionnellement à l'information disponible à la date t.

Quelle est la conséquence (et plus précisément la relation) qu'implique le concept de convergence absolue entre les pays 1 et 2 pour $\hat{y}_{1,t+k}$ et $\hat{y}_{2,t+k}$ quand on considère des horizons de prévision très éloignés? (1 point)

2) On définit le processus d'écart des PIB par tête par $x_t = y_{1,t} - y_{2,t}$. Afin de déterminer les conditions à poser sur ce processus pour que l'hypothèse de convergence absolue soit vérifiée, on considère dans cette question le processus suivant :

$$x_t = c + \frac{5}{8}x_{t-1} - \frac{1}{16}x_{t-2} + u_t$$

avec u_t i.i.d. $(0, \sigma_u^2)$ et $c \in R$.

a) Vérifiez que le processus $x_t, t \in Z$ est stationnaire (du second ordre). Calculez son espérance. (1 point)

b) Le processus est-il canonique ? Que peut-on en déduire quant à la représentation générale de la forme de Wold, redonnée ci-dessous ? (1 point)

$$x_t = \alpha + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i u_{t-i}$$

c) Déterminez de manière précise la représentation de Wold (c'est–à–dire les coefficients h_i). (2 point)

Indication : *Par identification avec la définition du processus, vous déterminerez l'équation de récurrence qui lie les paramètres de la forme de Wold, et vous déterminerez finalement la représentation précise de Wold.*

d) En utilisant les résultats de la question précédente, déterminez la prévision de x_{t+k} sachant l'information disponible à la date t avec k l'horizon de prévision.

En déduire la valeur de :

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}_{t+k}$$

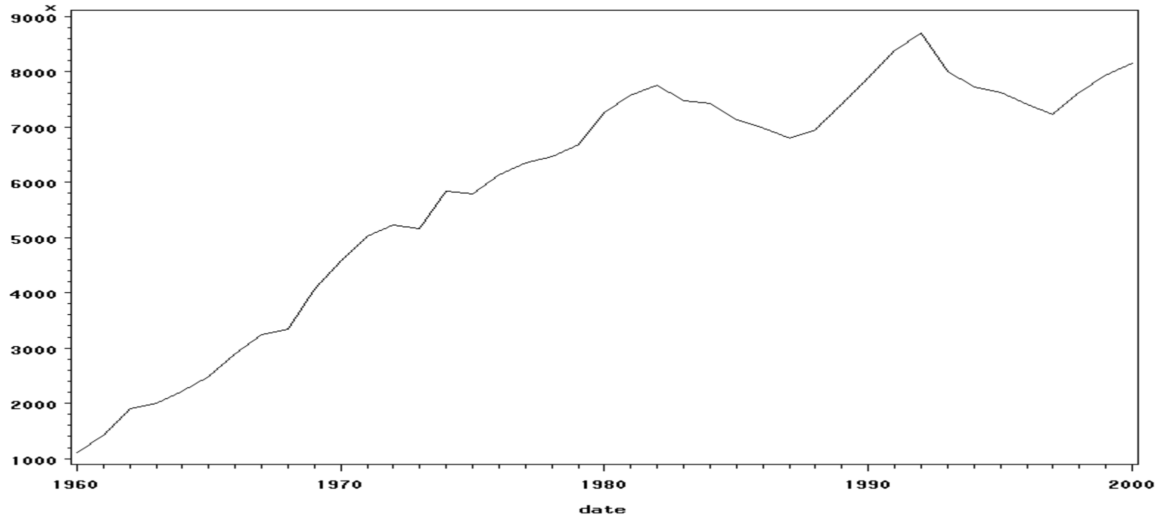
Que peut-on en déduire sur les conditions à poser pour que l'hypothèse de convergence absolue soit vérifiée? (2 points)

Partie 2 :

On dispose de données annuelles pour le PIB réel par tête de la France, du Royaume Uni et de l'Italie entre 1960 et 2000. On construit les séries d'écart de PIB par tête entre la France et le Royaume Uni d'une part, et entre le Royaume Uni et l'Italie d'autre part.

A partir des résultats ci-dessous, étudiez la nature de la stationnarité du processus x_t dans chaque cas, en décrivant précisément votre démarche. Que pouvez-vous en déduire sur la convergence de ces pays ? (4 points)

France - Royaume Uni




```
                              The ARIMA Procedure

                             Name of Variable = x

          Period(s) of Differencing                            1
          Mean of Working Series                         175.725
          Standard Deviation                            303.4546
          Number of Observations                              40
          Observation(s) eliminated by differencing            1

                               Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0     92084.699        1.00000    |                    |********************|            0
  1     35180.701        0.38205    |                .   |********            |     0.158114
  2     18633.182        0.20235    |               .    |****   .            |     0.179716
  3      1017.229        0.01105    |               .    |       .            |     0.185325
  4    -11876.973        -.12898    |               .  ***|       .            |     0.185341
  5    -18839.359        -.20459    |              .  ****|        .           |     0.187572
  6    -16971.614        -.18430    |              .  ****|        .           |     0.193070
  7      1829.492        0.01987    |              .     |        .           |     0.197419
  8     19356.442        0.21020    |              .     |****    .           |     0.197469
  9     20473.134        0.22233    |              .     |****    .           |     0.202986
 10     36648.680        0.39799    |              .     |********            |     0.208985

                          "." marks two standard errors
                           Partial Autocorrelations

        Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

          1        0.38205    |               .    |********            |
          2        0.06603    |               .    |*     .             |
          3       -0.10159    |               .  **|      .             |
          4       -0.13651    |               . ***|      .             |
          5       -0.11879    |               .  **|      .             |
          6       -0.04528    |               .   *|      .             |
          7        0.16750    |               .    |***   .             |
          8        0.21277    |               .    |****  .             |
          9        0.03827    |               .    |*     .             |
         10        0.26061    |               .    |*****.              |
```

The ARIMA Procedure

Name of Variable = x

Mean of Working Series	5885.298
Standard Deviation	2178.253
Number of Observations	41

Autocorrelations

```
Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0       4744786        1.00000    |                    |********************|             0
  1       4345078        0.91576    |                .   |******************  |      0.156174
  2       3928680        0.82800    |            .       |*****************   |      0.255535
  3       3543252        0.74677    |         .          |***************     |      0.314231
  4       3164485        0.66694    |        .           |*************.      |      0.354886
  5       2787053        0.58739    |       .            |************  .     |      0.384242
  6       2421003        0.51024    |      .             |**********     .    |      0.405553
  7       2088770        0.44022    |    .               |*********       .   |      0.420919
  8       1754015        0.36967    |    .               |*******         .   |      0.432003
  9       1346371        0.28376    |   .                |******           .  |      0.439651
 10        995072        0.20972    |   .                |****             .  |      0.444095
```

"." marks two standard errors

Partial Autocorrelations

```
Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.91576    |              .     |******************   |
  2       -0.06577    |              .    *|     .               |
  3       -0.00697    |              .     |     .               |
  4       -0.03949    |              .    *|     .               |
  5       -0.04507    |              .    *|     .               |
  6       -0.03471    |              .    *|     .               |
  7       -0.00708    |              .     |     .               |
  8       -0.05341    |              .    *|     .               |
  9       -0.14490    |              .  ***|     .               |
 10        0.01389    |              .     |     .               |
```

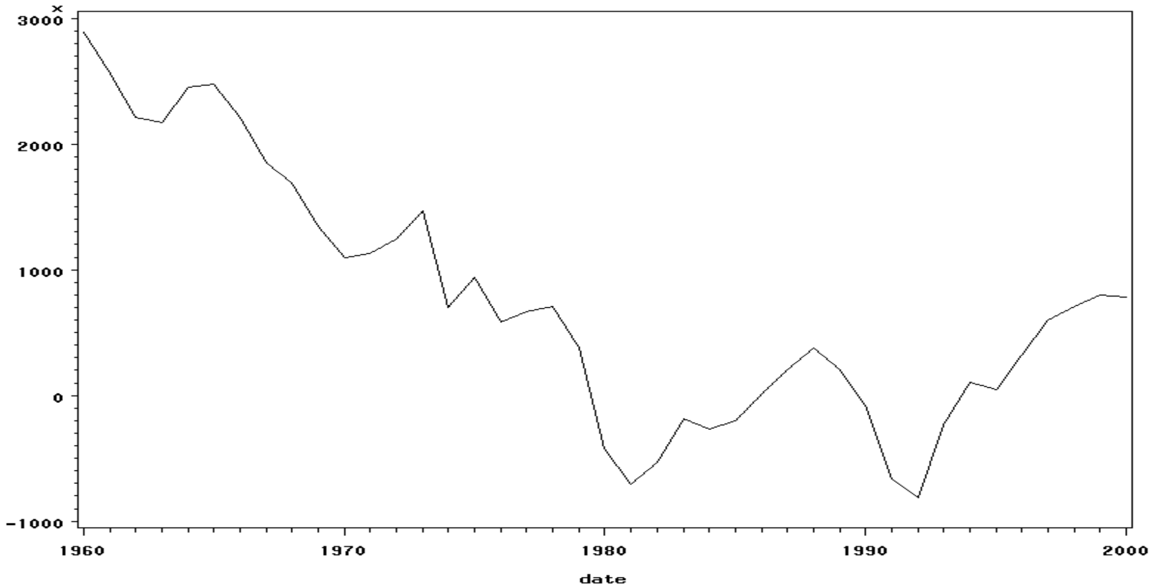
Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	--------------------Autocorrelations--------------------					
6	145.03	6	<.0001	0.916	0.828	0.747	0.667	0.587	0.510

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Tests

Type	Lags	Rho	Pr < Rho	Tau	Pr < Tau	F	Pr > F
Zero Mean	0	0.7771	0.8632	2.29	0.9938		
	1	0.6696	0.8394	1.10	0.9272		
	2	0.6129	0.8258	0.92	0.9019		
	3	0.6131	0.8256	0.93	0.9023		
	4	0.6133	0.8254	1.01	0.9138		
Single Mean	0	-2.3009	0.7325	-2.79	0.0684	11.57	0.0010
	1	-2.6866	0.6830	-2.19	0.2112	4.55	0.0670
	2	-2.5365	0.7019	-1.87	0.3415	3.15	0.2923
	3	-2.9272	0.6514	-2.42	0.1425	4.65	0.0613
	4	-2.9295	0.6507	-2.79	0.0700	5.95	0.0222
Trend	0	-2.5644	0.9484	-1.26	0.8836	3.80	0.4410
	1	-4.9926	0.8047	-1.68	0.7408	2.71	0.6470
	2	-5.6013	0.7539	-1.60	0.7730	2.12	0.7589
	3	-5.0138	0.8021	-1.56	0.7894	3.04	0.5845
	4	-3.3581	0.9125	-1.32	0.8659	3.76	0.4483

Royaume Uni - Italie




```
                              The ARIMA Procedure

                             Name of Variable = x

              Period(s) of Differencing                              1
              Mean of Working Series                          -52.7075
              Standard Deviation                              302.6049
              Number of Observations                                40
              Observation(s) eliminated by differencing              1

                                Autocorrelations

Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0     91569.715        1.00000    |                    |********************|              0
  1     21843.442        0.23854    |                .   |*****.              |       0.158114
  2     -5914.163        -.06459    |              .    *|    .               |       0.166869
  3    -19331.819        -.21112    |              . ****|    .               |       0.167493
  4       297.856        0.00325    |              .     |    .               |       0.174018
  5      2447.160        0.02672    |              .     |*   .               |       0.174019
  6      2178.161        0.02379    |              .     |    .               |       0.174122
  7     -3133.388        -.03422    |              .    *|    .               |       0.174203
  8     -8315.340        -.09081    |              .   **|    .               |       0.174371
  9     -4231.819        -.04621    |              .    *|    .               |       0.175549
 10     20896.362        0.22820    |              .     |*****               |       0.175853

                         "." marks two standard errors

                         Partial Autocorrelations

          Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

            1        0.23854    |               .    |*****.              |
            2       -0.12882    |               .  ***|    .              |
            3       -0.17575    |               . ****|    .              |
            4        0.10234    |               .    |**   .              |
            5       -0.03033    |               .   *|     .              |
            6       -0.01311    |               .    |     .              |
            7       -0.01503    |               .    |     .              |
            8       -0.08737    |               .  **|     .              |
            9       -0.00543    |               .    |     .              |
           10        0.25204    |               .    |*****.              |
```

The ARIMA Procedure

Name of Variable = x

Mean of Working Series	751.3195
Standard Deviation	989.8583
Number of Observations	41

Autocorrelations

```
Lag    Covariance    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1      Std Error

  0        979819        1.00000    |                    |********************|             0
  1        877989        0.89607    |              .     |******************  |      0.156174
  2        769734        0.78559    |          .         |****************    |      0.252108
  3        683525        0.69760    |        .           |**************      |      0.306044
  4        616194        0.62888    |      .             |*************.      |      0.342640
  5        531191        0.54213    |     .              |***********   .     |      0.369722
  6        439049        0.44809    |    .               |*********      .    |      0.388628
  7        355359        0.36268    |    .               |*******        .    |      0.401031
  8        290884        0.29687    |    .               |******         .    |      0.408953
  9        239161        0.24409    |   .                |*****           .   |      0.414176
 10        206633        0.21089    |   .                |****            .   |      0.417670
```

"." marks two standard errors

Partial Autocorrelations

```
Lag    Correlation    -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

  1        0.89607    |              .     |******************  |
  2       -0.08809    |              .   **|     .              |
  3        0.05413    |              .     |*    .              |
  4        0.03872    |              .     |*    .              |
  5       -0.13187    |              .  ***|     .              |
  6       -0.06936    |              .    *|     .              |
  7       -0.02542    |              .    *|     .              |
  8        0.01706    |              .     |     .              |
  9        0.01763    |              .     |     .              |
 10        0.07657    |              .     |**   .              |
```

Autocorrelation Check for White Noise

To Lag	Chi-Square	DF	Pr > ChiSq	Autocorrelations					
6	129.22	6	<.0001	0.896	0.786	0.698	0.629	0.542	0.448

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Tests

Type	Lags	Rho	Pr < Rho	Tau	Pr < Tau	F	Pr > F
Zero Mean	0	-3.6732	0.1818	-2.52	0.0129		
	1	-4.0022	0.1627	-2.04	0.0406		
	2	-3.3915	0.1997	-1.85	0.0618		
	3	-3.3997	0.1990	-2.07	0.0385		
	4	-4.5296	0.1362	-2.35	0.0199		
Single Mean	0	-4.1579	0.5029	-2.26	0.1892	3.21	0.2785
	1	-4.8944	0.4234	-1.99	0.2895	2.22	0.5187
	2	-4.0498	0.5142	-1.76	0.3950	1.77	0.6287
	3	-3.8473	0.5373	-1.88	0.3392	2.13	0.5406
	4	-5.4111	0.3717	-2.23	0.1981	2.83	0.3718
Trend	0	-2.9760	0.9317	-0.99	0.9349	2.63	0.6628
	1	-5.6178	0.7531	-1.33	0.8641	1.95	0.7911
	2	-3.3684	0.9125	-0.85	0.9521	1.52	0.8723
	3	-1.0013	0.9855	-0.31	0.9872	2.07	0.7688
	4	-2.1783	0.9606	-0.58	0.9741	2.64	0.6602