Bon Anniversaire Xavier !

Minimax, Maxisets, fonctions récalcitrantes ?

Dominique Picard

Laboratoire Probabilités et Modèles Aléatoires
Universités Paris VI et Paris VII

ET Iain Johnstone, Gérard Kerkyacharian, Marc Raimondo

soit

$$\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\} \text{ Base orthonormée},$$

$$B^s = \{f = \sum \theta_i e_i;\ \sup_{K \geq 1} K^s \sum_{k \geq K} \theta_k^2 < \infty\}$$

$$A^q = \{f = \sum \theta_i e_i;\ \sup_{\lambda > 0} \lambda^q card\{k;\ |\theta_k| \geq \lambda\} < \infty\}$$

$$0 < q < 2\ ,$$

$$s = \inf\{\sigma;\ B^\sigma \subset A^q\} = \tfrac{1}{q} - \tfrac{1}{2} \iff 2 - q = \tfrac{2s}{1+2s}$$

Minimax

On définit la vitesse minimax **minimax** α_n associée à une fonction de perte ρ et un espace $V \subset \Theta$:

$$\alpha_\epsilon = Minmax(\rho, V) = \inf_{\hat{q}_\epsilon} \sup_{\theta \in V} \mathbb{E}_\theta^\epsilon \rho(\hat{q}_\epsilon, q(\theta))$$

Modèle du bruit blanc Gaussien :

$$y_i = \theta_i + \epsilon w_i, \quad w_i \quad i.i.d. N(0,1)$$

$$q(\theta) = f = \sum \theta_i e_i,\ \rho(\hat{q}, q(\theta)) = \|\hat{f} - f\|_2^2 = \sum (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2$$

$$Minmax(\rho, B^s(R)) \sim [\epsilon^2]^{\frac{2s}{1+2s}}$$

$$Minmax(\rho, A^q(R)) \sim [\epsilon^2 \log(1/\epsilon)]^{2-q}$$

Entropie

On définit $N(\delta, K, d)$ comme le nombre minimal de boules de rayon δ pour la métrique d nécessaires pour recouvrir l'ensemble K.

$$E(\delta, K, d) = \log_2 N(\delta, K, d).$$

$$E(\delta, B^s(R), l_2) \sim \delta^{\frac{-1}{s}}$$

$$E(\delta, A^q(R)^*, l_2) \sim [\delta^{\frac{-2q}{2-q}} \log(1/\delta)]$$

$A^q(R)$ n'est pas compact, on l'intersecte avec un espace de type $B^\eta(R)$, avec η très petit, qui n'influence pas la vitesse.

Maxisets

On définit le **maxiset** associé à une suite d'estimateurs $\hat{q}_\epsilon$, une fonction de perte ρ, une vitesse de convergence α_ϵ et à la constante T :

$$MS((\hat{q}_\epsilon), \rho, (\alpha_\epsilon))(T) :=$$

$$\{\theta \in \Theta,\ \mathbb{E}_\theta^\epsilon \rho(\hat{q}_\epsilon, q(\theta)) \leq T\alpha_\epsilon,\ \forall \epsilon > 0\}$$

Ici : $MS((\hat{q}_\epsilon), \rho, (\alpha_\epsilon))(T) = \{\theta \in \Theta,\ \mathbb{E}_\theta^\epsilon \sum(\hat{\theta}_i^\epsilon - \theta_i)^2 \leq T\alpha_\epsilon,\ \forall \epsilon > 0\}$

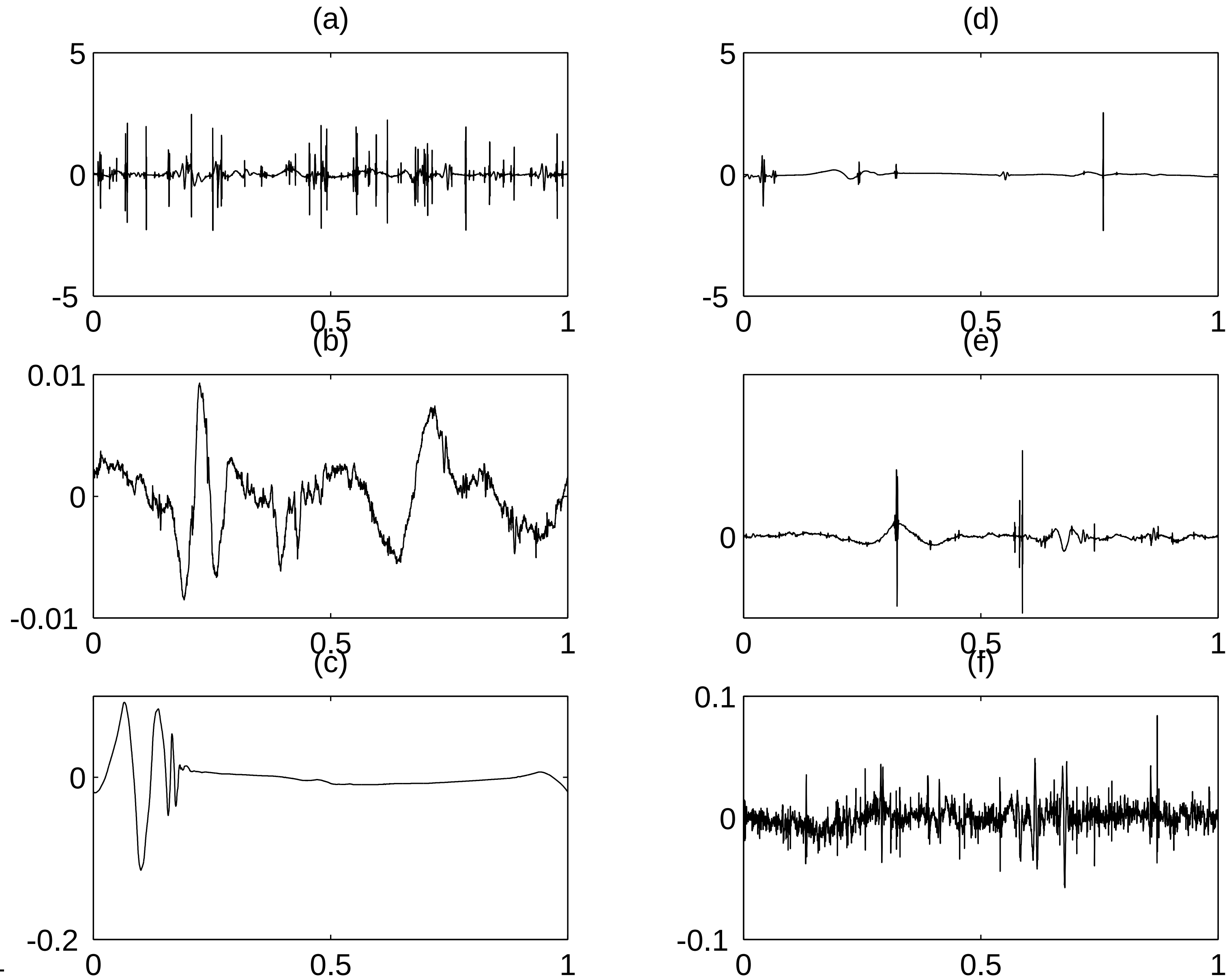
Deux exemples :

$$\hat{f}^{lin} = \sum_{k \leq K(\epsilon)} Y_i e_i,$$

$$MS(\hat{f}^{lin}, \rho, \epsilon^{\frac{4s}{1+2s}}) = B^s(R)$$

$$\hat{f}^{thr} = \sum Y_i e_i I\{Y_i \geq \tau\epsilon(\log 1/\epsilon)^{1/2}\}$$

$$MS(\hat{f}^{thr}, \rho, [\epsilon(\log 1/\epsilon)^{1/2}]^{2(2-q)}) = A^q(R)$$


(a)
5
0
-5
0
0.5
1
(d)
5
0
-5
0
0.5
1
(b)
0.01
0
-0.01
0
0.5
1
(e)
0
0
0.5
1
(c)
0
-0.2
0
0.5
1
(f)
0.1
0
-0.1
0
0.5
1

Application : Déconvolution et signaux LIDAR

$$Y_\epsilon(dt) = f \star g + \epsilon dW(t)$$

g connue : 'blurring'. On observe Y_ϵ. On veut reconstituer f.

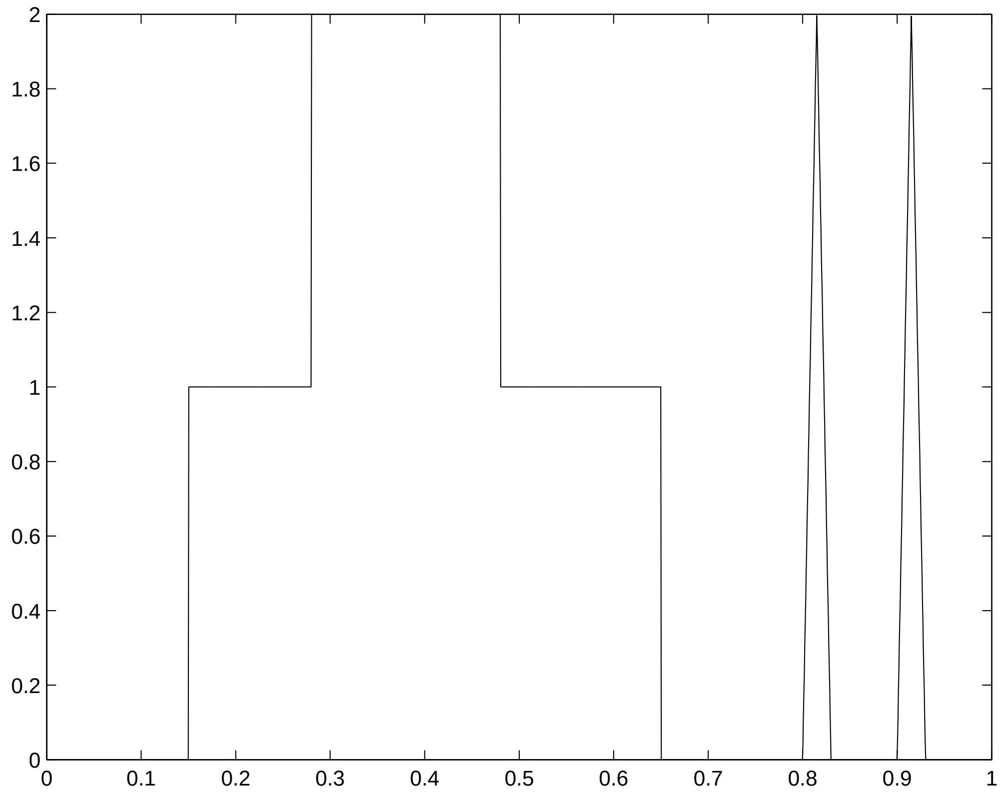
Pourquoi le problème est mal posé ?

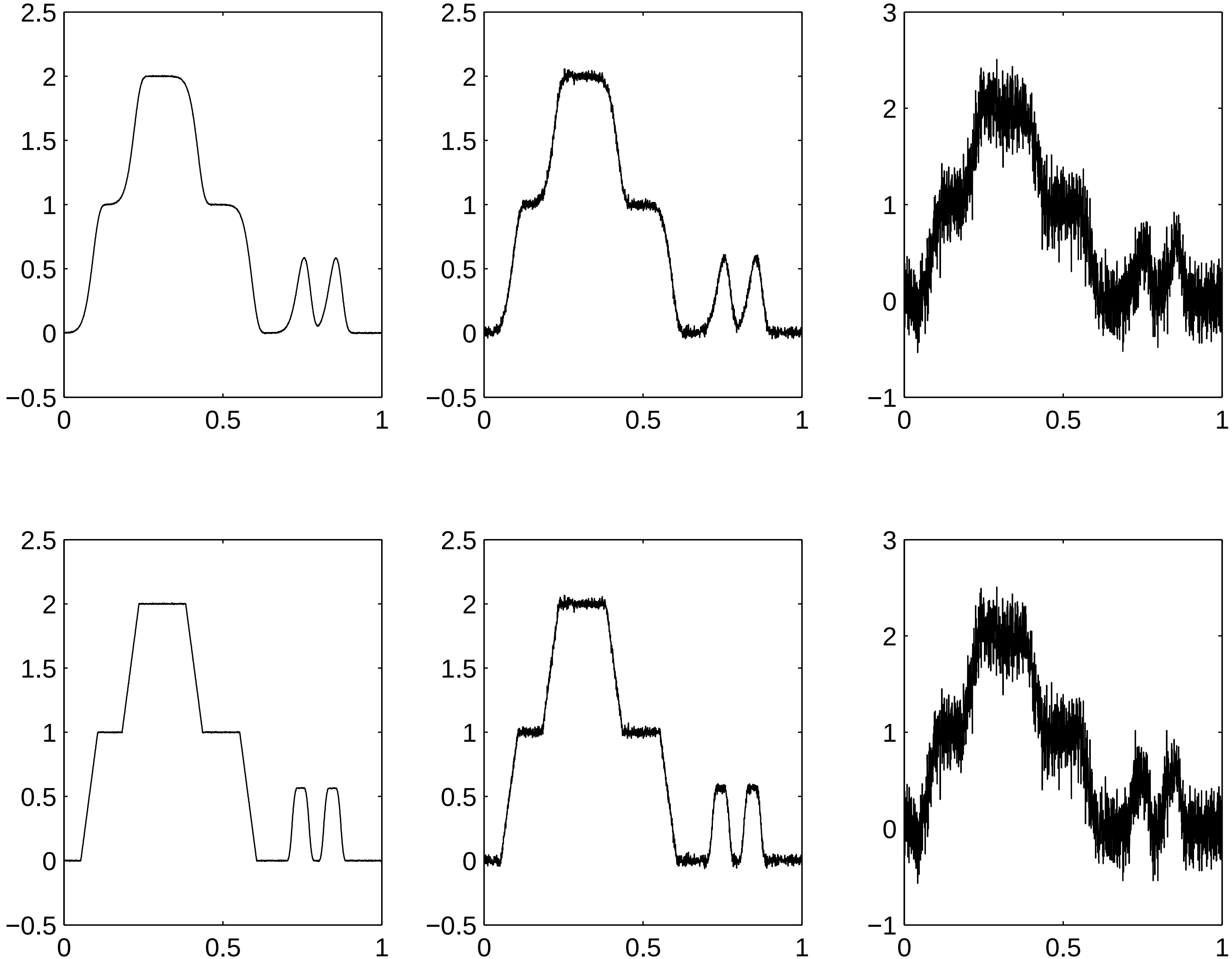
Cas des fonctions périodiques :

$$K(f) = f \star g \iff \widetilde{K(f)}_l = \tilde{f}_l \tilde{g}_l, \ \forall l \iff \tilde{f}_l = \tilde{K}(f)_l / \tilde{g}_l, \ \forall l$$

$$\text{typiquement, } \tilde{g}_l \sim 2^{-l\nu}, \nu > 0$$

i.e. plus g est régulière, plus le problème est mal posé !


2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
0
0.5
1
3
−1

Construction de l'estimateur :

$\{\psi_{jk},\ j \geq 0,\ k\ \in\ \mathbb{N}\}$ base d'ondelettes. $\{e_l,\ l \in\ \mathbb{Z}\}$ base de Fourier.

$$f = \sum \beta_{jk}\psi_{j,k} \iff \beta_{jk} = \int f\psi_{j,k} = \sum_l \tilde{f}_l(\tilde{\psi_{j,k}})_l$$

$$\hat{h}_l = \int e_l(t)dY_\epsilon(t)\text{est un estimateur de } \tilde{K(f)}_l.$$

$$\hat{\beta_{jk}} = \sum_l (\tilde{\psi_{j,k}})_l \hat{h}_l / \tilde{g}_l$$

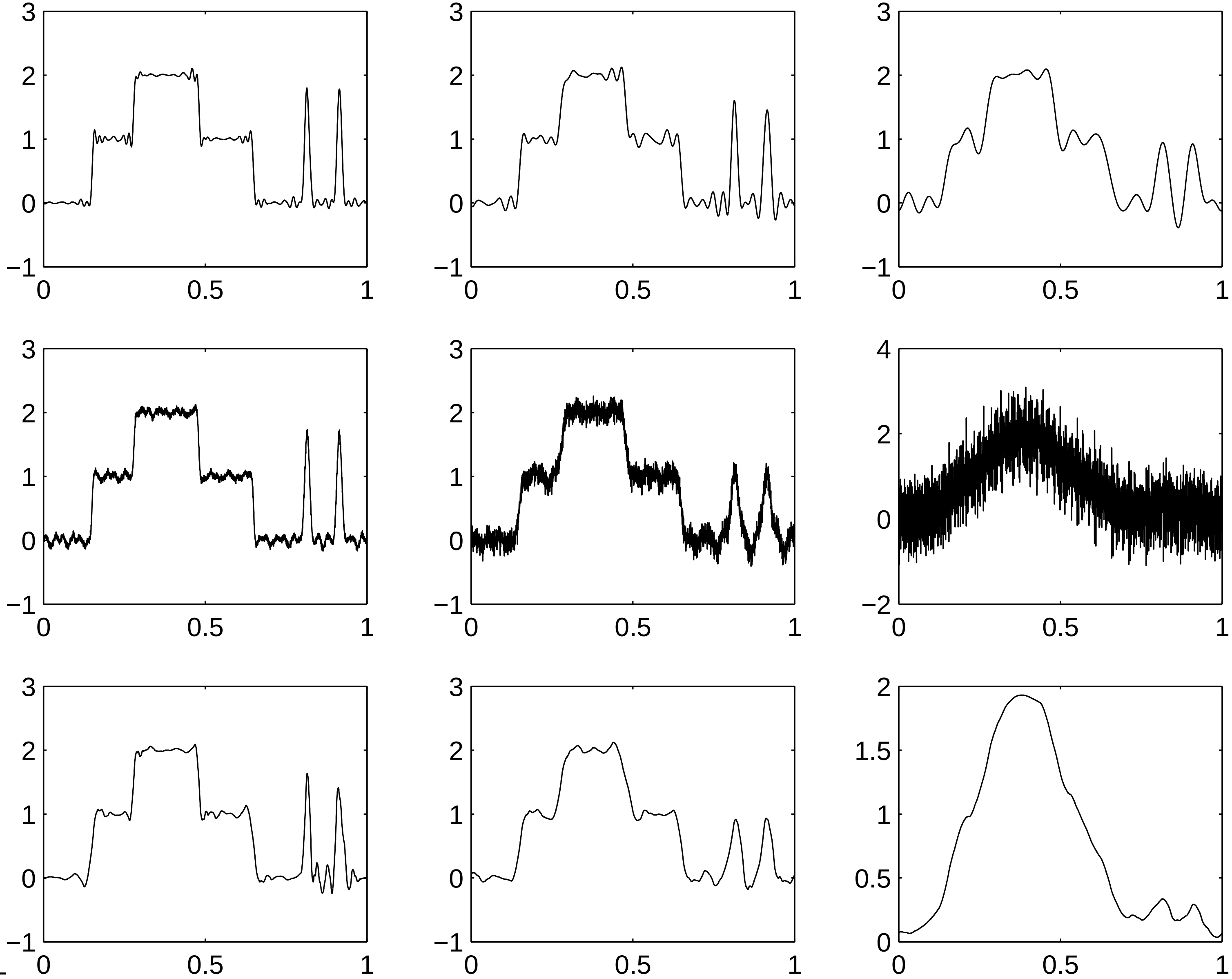
$\psi_{j,k}$ base d'ondelette de Meyer dont la transformée de Fourier est à support compact.

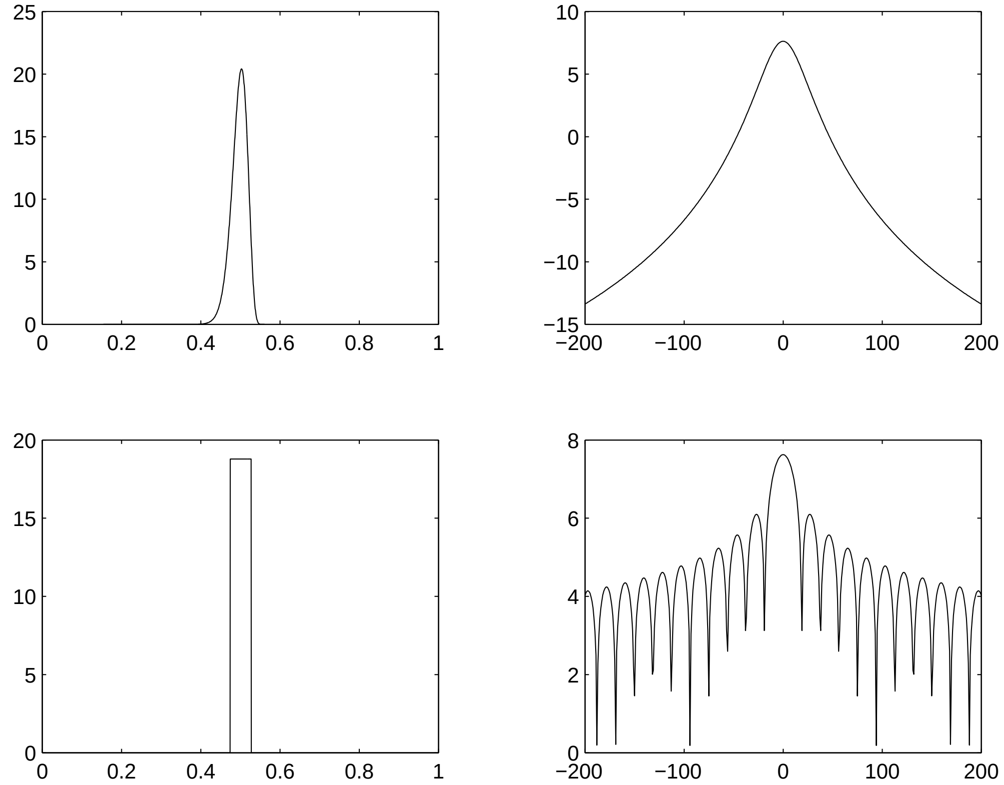
$$\text{On a } \hat{\beta_{jk}} - \beta_{jk} \sim N(O,\ \sigma_{jk}^2)$$

$$\sigma_{jk}^2 \sim \epsilon^2 \frac{\sum_{l,\ (\tilde{\psi_{j,k}})_l \neq 0} \tilde{g_l}^{-2}}{card\{l,\ (\tilde{\psi_{j,k}})_l \neq 0\}} = {\tau_j}^2$$

Estimateur :

$$\hat{f} = \sum_{j \leq J_1(\epsilon)} \sum_k \hat{\beta_{jk}} \psi_{j,k} I\{|\hat{\beta_{jk}} \geq \tau \tau_j \epsilon \sqrt{\log 1/\epsilon}\}$$


3
2
1
0
−1
0
0.5
1
4
−2
1.5
0.5


25
20
15
10
5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
10
5
0
−5
−10
−15
−200
−100
0
100
200
20
15
10
5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
8
6
4
2
0
−200
−100
0
100
200

$$\tau_j \sim \epsilon 2^{j\nu}$$

Le maxiset de la méthode est :

$$MS(\hat{f}, \rho, [\epsilon(\log 1/\epsilon)^{1/2}]^{2(2-q)}) =$$

$$\{f = \sum \beta_{jk}\psi_{j,k};\ \sup_{\lambda>0} \lambda^q \sum_j {\tau_j}^2 card\{|\beta_{jk}| \geq \lambda\tau_j\} < \infty\}^* = (\tilde{A}^q)^*$$

Interprétation de la vitesse minimax $\frac{2s}{1+2s+2\nu}$:

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \sum_j {\tau_j}^2 card\{|\beta_{jk}| \geq \lambda \tau_j\} < \infty$$

$$\iff \sup_{\lambda>0} \lambda^{q-2} \sum_j \sum_k \beta_{jk}^2 \{|\beta_{jk}| \leq \lambda \tau_j\} < \infty$$

$$\inf\{\sigma : B^\sigma \subset \tilde{A}^q\} = s$$

$$\boxed{2 - q = \frac{2s}{1+2s+2\nu}}$$