Correction de certains exercices de la feuille n^o 5:

Séries entières

(9) **(**)** Déterminer le domaine de définition dans $\mathbb{C}$ de la série entière $\sum a_n z_n$ lorsque a_n est donné par:

$$\mathbf{1}.\ a_n = \frac{2^n}{n} \qquad \mathbf{2}.\ a_n = \ln n \qquad \mathbf{3}.\ a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \qquad \mathbf{4}.\ a_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$$

Proof. Déterminer le domaine de définition dans $\mathbb{C}$ de la série entière $\sum a_n z_n$ revient à déterminer l'ensemble des z pour les quelles cette série est convergente. On sait que $\sum a_n z_n$ converge pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Déterminons R pour chaque cas:

1. Par la règle de d'Alembert on trouve $R = \frac{1}{2}$ donc $\sum a_n z_n$ converge pour $|z| < \frac{1}{2}$ et diverge pour $|z| > \frac{1}{2}$, étudiant la convergence pour $|z| = \frac{1}{2}$, donc $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ et $\sum a_n z_n = \sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ qui converge d'après le critère d'Abel si $\theta \neq 2k\pi$ et diverge si $\theta = 2k\pi$ ($\sum \frac{1}{n}$, Riemann). D'où le domaine de définition est $\overline{D}(0, \frac{1}{2}) \backslash (0, \frac{1}{2})$.

2. Par la règle de d'Alembert on trouve $R = 1$, et comme pour **1**, on trouve le domaine de définition est $\overline{D}(0,1)\backslash(0,1)$. On fait la même chose pour **3** et **4**. □

(11) **(***)** Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit f la somme de la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n-1}}{n!(4n-1)}$, dont on précisera le rayon de convergence. Montrer que f admet une limite en $+\infty$.

Proof.

(1) on pose $g(t) = \frac{1-e^{-t^4}}{t^2}$, g est continue sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^\infty g(t)dt$ possède un problème de convergence en 0 et en $+\infty$.

Pb en 0: $g(t) \sim \frac{1-(1-t^4)}{t^2} = t^2 \to 0$, donc g est prolongeable par continuité en 0. Pb en ∞: $g(t) \le \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ converge par Riemann. Donc on conclut que g est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(2) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n-1}}{n!(4n-1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n}}{n!(4n-1)}$.

Le rayon de convergence de f est celui de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n}}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}z^n}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(4n-1)}$.

On a $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{n+1} \to 0$ et par la regle de d'Alembert le rayon de convergence de $\sum a_n z_n$ est $R = +\infty$, c'est à dire $\sum a_n z_n$ converge $\forall z \in \mathbb{R}$ et donc $\sum a_n x^{4n}$ convege $\forall x \in \mathbb{R}$ et par suite le rayon de convergence de f est $+\infty$.

Maintenant, en le théorème d'intégration, on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{4n-1}}{n!(4n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^x t^{4n-2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^{4n-2}dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} t^{4n-2}dt = \int_0^x \frac{-1}{t^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t^4)^n}{n!}dt = \int_0^x \frac{-1}{t^2}(1-e^{-t^4})dt = \int_0^x g(t)dt. \end{aligned}$$

Comme g est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_0^\infty g(t)dt < \infty$.

□

(12) **(*)** Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série obtenue.

1. $\ln(1+2x^2)$	**2**. $\frac{1}{a-x}$ avec $a \neq 0$
3. $\ln(a+x)$	**4**. $\frac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+x-2x^2)$	**6**. $(4+x^2)^{-3/2}$

Proof.

1. Le développement en série entière de $\ln(1+t)$ est: $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$, $\forall\ |t| < 1$.

En remplaçant t par $2x^2$ on obtient: $\ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}2^n x^{2n}}{n}$.

La série converge si $|2x| < 1$. . Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. On a: $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}}$, en remplaçant t par $\frac{x}{a}$ dans $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=1}^\infty t^n$, $\forall\ |t| < 1$, il vient:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \times \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{a^{n+1}}$$

$\forall\ |\frac{x}{a}| < 1 \Leftrightarrow |x| < |a|$. Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.

3. On factorise par a:

$$\ln(x+a) = \ln(a) + \ln(1+\frac{x}{a})$$

Comme dans (**1**.) pour $\frac{x}{a} < |1|$, soit $|x| < |a|$, on en déduit

$$\ln(x+a) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{na^n}$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est $|a|$.

4. On réalise le produit de Cauchy des deux séries :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ et } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

La deuxième série ayant pour rayon de convergence 1, on en déduit que pour $|x| < 1$, on a

$$\frac{e^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ avec } a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

La série converge pour $|x| < 1$ (règle du produit de Cauchy), et comme $|a_n| \geq 1$, le rayon de convergence de la série obtenue est exactement égal à 1.

5. On a $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$ donc la fonction est définie sur $]-\frac{1}{2}, 1[$, et sur cet intervalle, elle s'écrit $\ln(1+x-2x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$. En utilisant les développements en série entière des $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (valable pour $|x| < 1$) et $\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}$ (valable pour $|x| < \frac{1}{2}$) et en efectuant la somme, on en déduit que

$$\ln(1+x-2x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n - 1}{n} x^n$$

La série obtenue est de rayon de convergence $\frac{1}{2}$. □

(13) **(**)** Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t) = cos(\alpha \arcsin t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (a) Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
 (b) Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
 (c) En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

.

Proof. (a) On dérive deux fois f pour obtenir: $f(t) = \cos(\alpha \arcsin t)$, $f'(t) = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \sin(\alpha \arcsin t)$, $f''(t) = \frac{-\alpha^2}{1-t^2} \cos(\alpha \arcsin t) - \frac{\alpha t}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)} \sin(\alpha \arcsin t)$.
Pour éliminer les termes en $\cos(\alpha \arcsin t)$, on combine f et f'' puis on ajoute les termes en f' pour éliminer les termes en $\sin(\alpha \arcsin t)$. Au final, on trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante:

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$$

(b) On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, on en déduit que par le théorème de dérivation d'une série entière que $y'(t) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n$ et y"(t)=$\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$ et donc $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = \sum_{n\geq 0}((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n + \alpha^2)a_n)t^n = 0$, $\forall t \in]-R, R[$. Par unicité du développement en serie entière, on obtient: $(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \alpha^2)a_n$. Puisque $a_0 = 0$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = 0$, on en déduit par induction que $a_{2p+1} = 0$ pour tout p et que $a_{2p} = \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2} - p + 1)(\frac{\alpha}{2} - p + 2)...(\frac{\alpha}{2} + p - 1)$.
Réciproquement, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{2p}x^{2p}$ a un rayon de convergence égale à 1 par d'Alembert. Donc $y(t) = \sum_{n\geq 0} a_{2p}x^{2p}$ est solution de l'équation différentielle avec les condition initiales voulues.

(c) L'équations différentielle $(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - t^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1,1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. f est la série entière trouvée à la question précédente convienne. On en déduit que qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-4)^p}{(2p)!} \frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2} - p + 1)(\frac{\alpha}{2} - p + 2)...(\frac{\alpha}{2} + p - 1)x^{2p}.$$

□

(19) **(*)** On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation véerifant $y(0) = y'(0) = 0$.
 (a) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifer la suite (a_n)?
 (b) Calculer explicitement an pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
 (c) Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Proof.

(a) Soi $r > 0$ le rayon de convergence de f. On a, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ xf'(x) &= x\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} na_n x^n \\ f''(x) &= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-r, r[$, on a

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n x^n.$$

Or, f"+ xf'+f=1. Par unicité du développement en série entière, on obtient

$$a_2 = (1 - a_0) \text{ et } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \text{ pour } n \geq 1$$

(b) On sait en outre que $a_0 = y(0) = 0$ et que $a_1 = y'(0) = 0$. On en déduit que tous les termes impairs a_{2n+1} sont nuls, puis que, pour les termes pairs

$$a_{2n} = \frac{-1}{2n} \times \frac{-1}{2n-2} \times ... \times \frac{-1}{4} a_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$$

On factorise tous les termes qui sont pairs au dénominateur, et on trouve

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}$$

valable pour $n \geq 1$. Réciproquement, posons $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$. La série entière qui apparait est de rayon de convergence égal à $+\infty$, la fonction f ainsi définie est donc de classe C^1 et, remontant les calculs, elle est solution de l'équation différentielle initiale.

(c) De plus, on peut l'identifier à une fonction classique. En effet,

$$f(x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}(\frac{-x^2}{2})^n = 1 - e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$\square$