Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2012-2013

Feuille n^o 5:

Séries entières, correction

1.($*$) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \frac{n^2}{(2n)!}x^n$	**2**. $\sum_n \cos nx^n$	**3**. $\sum_n \frac{nx^{2n}}{3^n+1}$
4. $\sum_n \frac{(1+\ln n)^{\ln n}x^{3n}}{2^n}$	**5**. $\sum_n \frac{(2+n)^n}{1+\ln n}x^n$	**6**. $\sum_n \frac{(-1)^n}{\prod_{i=2}^n \ln i}x^n$
7. $\sum_n a^{\ln n}x^n,\ a>0$	**8**. $\sum_n x^{[\sqrt{n}]}$, où $[\cdot]$ partie entière	**9**. $\sum_n (\sin n)^{1/n}x^n$

Correction
1. On pose $a_n = \frac{n^2}{(2n)!}$, on applique d'Alembert, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2(2n)!}{n^2(2n+2)!}\right| \sim \left|\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right| \to 0$, donc, $R=\infty$.
3. On a ici quelque chose du type $a_n x^{kn}$, $k \neq 1$, on va simplement appliquer la règle de d'Alembert pour les séries, à savoir que $\sum b_n$ converge (absolument) ssi $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < 1$. Alors, $\left|\frac{(n+1)x^{2n+2}(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)nx^{2n}}\right| \sim \left|\frac{x^2}{3}\right|$, on veut donc inférieur à 1 pour assurer la convergence, soit, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ et donc, $R=\sqrt{3}$ (la plus grande valeur tel que tout $|x|<R$ converge).
7. On pose $a_n = a^{ln(n)} = e^{a\ln(\ln(n))}$, on applique Cauchy, $\left|e^{a\ln(\ln(n))}\right|^{1/n} = \left|e^{a\frac{1}{n}\ln(\ln(n))}\right| \to 1$ par croissance comparée, donc, $R=1$.

3.($*$)

(1) Donner un exemple de série entière de rayon de convergence 3.
(2) Est-il possible de trouver des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ ont le même rayon de convergence?
(3) Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} \ln n a_n z^n$?

Correction Voir correction feuille 5, 2011/2012.

4.($*$) Pour les séries entières suivantes, donner le rayon de convergence et exprimer leur somme en termes de fonctions usuelles:

1. $\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{n+1}x^n$ **2**. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(n+k)}x^n$, où $k\in\mathbb{N}^*$ **3**. $\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n!}x^n$ **4**. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

Correction
1.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\frac{2n-1}{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0} 2x^n - \sum_{n\geq 0}\frac{3}{n+1}x^n \\
&= 2\sum_{n\geq 0} x^n - 3\frac{x}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^n \\
&= 2\sum_{n\geq 0} x^n - 3\frac{1}{x}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^{n+1} \\
&= \frac{2}{1-x} + 3\frac{\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}
$$

et $R = 1$
3.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n!} x^n &= \sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!} x^n + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 0 + \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!} x^n + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} x^n + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^{n+1} + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\
&= x\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n + 2\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n \\
&= xe^x + 2e^x = (x+2)e^x
\end{aligned}$$

.
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan(x)$ (faire le DL pour s'en convaincre!).

5. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
Correction Voir correction feuille 5, 2011/2012.

6. Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries suivantes: $a_n \ln(n!) x^n$; $\quad a_n z^{2n}$; $\quad a_n z^{n^2}$.
Correction Voir correction feuille 5, 2011/2012. Remarque: pour $a_n \ln(n!) x^n$ on trouve $R = R'$.

9. Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

1. $\ln(2-x)$	**2**. $\dfrac{1}{a+x^2}$ avec $a \neq 0$
3. $(1+x^2)^{-1/2}$	**4**. $\dfrac{e^x}{1-x}$
5. $\ln(1+2x-3x^2)$	**6**. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Correction Dans chacun des cas, nous essayons de nous ramener à nu DL connu.
1.

$$\begin{aligned}
\ln(2-x) &= \ln(2(1-x/2)) \\
&= \ln(2) + \ln(1-x/2) \\
&= \ln(2) - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} X^n \text{ avec } X = x/2 \text{ (changement admissible, même comportement)} \\
&= \ln(2) - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \ln(2) - \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n2^n} x^n.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\ln(2)$ n'influ pas sur la convergence de la série, c'est une constante. Il suffit donc d'étudier le terme général de la série, $a_n = \frac{1}{n2^n}$, et après quelque calculs, on trouve $R = 2$.
2. On pose $X = x^2/a$, alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+x^2} &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+X}\right) \\
&= \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}(-1)^n X^n \\
&= \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \left(\frac{x^2}{a}\right)^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} x^{2n}
\end{aligned}$$

En appliquant la règle de d'Alembert, on trouve $R = \sqrt{a}$.
3. Avec $X = x^2$,

$$\begin{aligned}(1+X)^{-1/2} &= \sum_{n\geq 0} \frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)(-1/2-3)\cdots}{n!} X^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{-1/2(-3/2)(-5/2)(-7/2)\cdots}{n!} X^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!} X^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!} x^{2n}.\end{aligned}$$

4.

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(\sum \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^n$$

Il s'agit du produit de Cauchy. R=1.

11. On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

(1) Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n)?
(2) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue?
(3) Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions usuelles.

Correction Voir correction feuille 5, 2011/2012.

12. Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle: $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.
Correction Voir correction feuille 5, 2011/2012.