Corrections de quelques exercices de la feuille n^o 1:

Espaces euclidiens et préhilbertiens

(1) **(**)** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; déterminer parmi les applications $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E.

(a) $E = \mathbb{R}$ et $\langle x, x'\rangle = x^2 + 2xx'$.

(b) $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + 2xy' - 2yx' + yy'$.

(c) $E = \mathbb{R}^2$ et $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$.

(d) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{1} P(k)Q(k)$.

(e) $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles et pour $f,\, g \in E$, $\langle f,g\rangle = \int_a^b \big(f^2(t) + g^2(t) - (f(t)+g(t))^2\big)dt$.

Proof. **Rappel** Une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto B(x,y)$ est dite un produit scalaire, si elle est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Donc si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite alors B n'est pas un produit scalaire.
(a) $\langle x,x'\rangle = x^2 + 2xx'$ n'est pas un produit scalaire, car elle n'est pas linéaire par rapport à la première variable. En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x, x'\rangle = (\lambda x)^2 + 2(\lambda x)x' \neq \lambda(x^2 + 2xx')$.
(b) $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + 2xy' - 2yx' + yy'$ n'est pas un produit scalaire, car elle n'est pas symétrique. En effet, $\langle (x',y'),(x,y)\rangle = 3x'x + 2x'y - 2y'x + y'y \neq \langle (x,y),(x',y')\rangle$.
(c) $\langle (x,y),(x',y')\rangle = 3xx' + 2xy' + 2yx' + yy'$ n'est pas un produit scalaire, car elle n'est pas positive. En effet $\langle (x,y),(x,y)\rangle = 3x^2 + 2xy + 2yx + y^2 = 3x^2 + 4xy + y^2$ ainsi si on prend $\langle (1,-2),(1,-2)\rangle = -1 < 0$ (contre exemple).
(d) $\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{1} P(k)Q(k)$ n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas définie-positive. En effet, soit $P \in \mathbb{R}_2[X], P(x) = a_0 + a_1X + a_2X^2$
(e) $\langle f,g\rangle = \int_a^b \big(f^2(t) + g^2(t) - (f(t)+g(t))^2\big)dt = -2\int_a^b \big(f(t).g(t)\big)dt$ (penser tout d'abord à developper et simplifier les écritures!), n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas positive. En effet $\langle f,f\rangle = -2\int_a^b \big(f^2(t)\big)dt \le 0$. □

(5) **(**)** Aprs avoir introduit un produit scalaire adquat, montrer les inégalités suivantes :

(a) pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$,

$$|xx' - 2xy' - 2yx' + 6yy'| \le \sqrt{x^2 - 4xy + 6y^2}\sqrt{(x')^2 - 4x'y' + 6(y')^2}$$

(b) Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \le \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\left(\int_{-1}^1 t\,P(t)dt\right)^2 \le \frac{2}{3}\int_{-1}^1 (P(t))^2dt.$$

Proof. Le but de cet exercice est d'appliquer le Théorème de Cauchy-Schwartz, et savoir comment en sevir pour démontrer quelques inégalités. Dans les tois questions il faut bien choisir le produit scalaire convenable, afin que l'inégalité à démontrer soit exactement l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
a/Pour $a = (x,y)$, $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$, posons $\langle u,v\rangle = xx' - 2xy' - 2yx' + 6yy'$, il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (à vérifier), ainsi l'inégalité demandée est exactement l inégalité de Cauchy-Schwartz.
b/Pou $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, posons $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ (à vérifier), ainsi l'inégalité demandée est exactement l inégalité de Cauchy-Schwartz.
c/ Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$, il s'agit bien d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (à vérifier), ainsi l'inégalité demandée est exactement l inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à P et $Q(t) = t$ en mettant au carré .

(7) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(a) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x \quad x \in [0,1]$.

(b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto \ln(1+x)$, $x \in [0,1]$.

Proof. a/ f_1 et f_2 forment une base. Pour la rendre orthonormée, avec le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on pose $g_1 = f_1/\|f_1\| = f_1$ puis $g_2 = (f_2 - \langle g_1, f_2\rangle g_1)/\|f_2 - \langle g_1, f_2\rangle g_1\| = (x-1/2)/\|x-1/2\| = \sqrt{12}(x-1/2)$.
b/ On a $p_F(\ln(1+x)) = \langle \ln(1+x), g_1\rangle g_1 + \langle \ln(1+x), g_2\rangle g_2 = \big(\int_0^1 \ln(1+x)dx\big)1 + \big(\int_0^1 \ln(1+x)(\sqrt{12}(x-1/2))dx\big)\sqrt{12}(x-1/2)$. (on integre par parties) □

(8) **(**)** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx.$$

(b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E. Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).

(c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Proof. a/ Une première chose à montrer serait que pour $f \in E$, $< f, f >$, qui est une intégrale impropre, existe. Les problèmes de convergence peuvent avoir lieu en -1 et 1 puisqu'ailleurs la fonction $f^2(x)/\sqrt{1-x^2}$ est continue. Or par exemple en 1, $f^2(x)/\sqrt{1-x^2} \sim f^2(1)/(\sqrt{2}\sqrt{1-x})$ et on sait que $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x}$ existe. Donc d'aprés le théorème de comparaison, $\int_0^1 f^2(x)/\sqrt{1-x^2}dx$ existe. Ensuite, il est facile de voir que $\langle f, g\rangle$ est bien un produit scalaire (voir les exercices précédents).
b/ Une base de F est $(1, X, X^2)$. On utilise alors le procédé d'orthonormalisation de Graham-Schmidt. Soit (e_1, e_2, e_3) la nouvelle base orthonormale que l'on déduit de $(1, X, X^2)$. En premier lieu, $e_1 = 1/\|1\|$. Or $\|1\|^2 = \int_{-1}^1 dx/\sqrt{1-x^2}dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$. D'où $e_1 = 1/\sqrt{\pi}$.
Ensuite, $e_2 = (X - \langle e_1, X\rangle e_1)/\|X - \langle e_1, X\rangle e_1\|$. Mais $\langle e_1, X\rangle = 0$ pour des raisons de parité, d'où $e_2 = X/\|X\|$ et $\|X\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx/\sqrt{1-x^2}dx = 2\big(\big[-x\sqrt{1-x^2}\big]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\big) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta$ par intégration par parties et avec le changement de variable $x = \sin\theta$. On en déduit que $\|X\|^2 = \pi/2$, d'où $e_2 = \sqrt{2}X/\sqrt{\pi}$.
Enfin, $e_3 = (X^2 - \langle e_1, X^2\rangle e_1 - \langle e_2, X^2\rangle e_2)/\|X^2 - \langle e_1, X^2\rangle e_1 - \langle e_2, X^2\rangle e_2\| = (X^2 - 1/2)/\|X^2 - 1/2\|$. Par intégration par parties, $\|X^2\|^2 = 6\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = 6\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = 3/2\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\theta)d\theta = 3\pi/8$. Par suite, $\|X^2 - 1/2\|^2 = 3\pi/8 - \pi/2 + \pi/4 = \pi/8$ d'où $e_3 = \sqrt{2}(2X^2-1)/\sqrt{\pi}$.
c/ On sait qu'avec $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p_F(g) = \langle e_1, g\rangle e_1 + \langle e_2, g\rangle e_2 + \langle e_3, g\rangle e_3$. Or $\langle e_1, g\rangle = 2/\sqrt{\pi}$, $\langle e_2, g\rangle = 0$ et $\langle e_3, g\rangle = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}\int_{-1}^1(2x^2-1)dx$. Aprés calculs, on obtient $p_F(g) = (10 - 8x^2)/3\pi$.
□

(10) **(**)** Calculer le minimum sur $\mathbb{R}^3$ de

$$f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-2x}dx.$$

Indication : On penser à une projection aprés avoir introduit le produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-2t}dt.$$

Proof. Avec la même méthode que dans l'exercice précédent, on peut montrer que $\langle P, Q\rangle$ est bien un produit scalaire. Si $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, alors en utilisant le produit scalaire proposé et la norme associée

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf_{P(x)\in\mathbb{R}_2[X]} \|x^3 - P(x)\|^2.$$

Mais comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un e.v. de dimension finie (3) alors cette borne inférieure est atteinte pour $p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3)$, projection orthogonale de x^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que:

$$\big\langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), 1\big\rangle = \big\langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), x\big\rangle = \big\langle x^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(x^3), x^2\big\rangle = 0.$$

Pour calculer ces différents produits scalaires, il est utile de calculer $u_n = \int_0^\infty x^n e^{-2x}dx$. Avec le changement de variables $y = 2x$, on a $u_n = (\int_0^\infty y^n e^{-y}dy)/2^{n+1}$, soit $u_n = n!/2^{n+1}$. De ceci, on obtient trois équations linéaires qui doivent être vérifiées par (a^*, b^*, c^*):

$$\left\{\begin{array}{lcl} 6/16 - 2a^*/8 - b^*/4 - c^*/2 & = & 0 \\ 24/32 - 6a^*/16 - 2b^*/8 - c^*/4 & = & 0 \\ 120/64 - 24a^*/32 - 6b^*/16 - 2c^*/8 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3 - 2a^* - 2b^* - 4c^* & = & 0 \\ 6 - 3a^* - 2b^* - 2c^* & = & 0 \\ 15 - 6a^* - 3b^* - 2c^* & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $a^* = 9/2$, $b^* = -9/2$ et $c^* = 3/4$. □

(11) **(**)** Déterminer $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x\sin(t) + y\cos(t) - t)^2 \mathrm{d}t$.

Proof. La preuve ressemble à celle ci-dessus, les différences étant que l'on considère le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$ et que l'on recherche, avec le s.e.v. $E = \{x\sin(t) + y\cos(t),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$$\inf_{P(t)\in E} \|t - P(t)\|^2 = \|t - p_E(t)\|^2,$$

où $p_E(t)$, projection orthogonale de la fonction $t \to t$ sur E. Comme $(\sin t, \cos t)$ est une base de E, on en déduit que:

$$\langle t - p_E(t), \sin t\rangle = \langle t - p_E(t), \cos t\rangle = 0.$$

De ceci, on obtient deux équations linéaires qui doivent étre vérifiées par (x^*, y^*):

$$\left\{\begin{array}{lcl} \pi - \pi\, x^*/2 & = & 0 \\ -2 - \pi\, y^*/2 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où $x^* = 2$ et $y^* = -4/\pi$. On en déduit que $\inf_{P(t)\in E} \|t-P(t)\|^2 = \int_0^\pi (t-2\sin t+4\cos t/\pi)^2 dt = \pi^3/3-2\pi-8/\pi$. $\square$

Correction Ex 12

$E = \mathbb{R}^4$, $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,;\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_1 = x_2 + x_3\}$

a) • Mq F est un sev de E ?

(i) l'element neutre de E, $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0) \in F$

(ii) soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda x + y \in F$?

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3, \lambda x_4 + y_4)$$

Or $x \in F$, donc $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 + x_3 \end{cases}$

ce qui implique $\begin{cases} \lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 - \lambda x_4 = 0 & (1) \\ \lambda x_1 = \lambda x_2 + \lambda x_3 & (2) \end{cases}$

De plus $y \in F$, donc $\begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 & (3) \\ y_1 = y_2 + y_3 & (4) \end{cases}$

Ainsi $(1) + (3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3 + \lambda x_4 + y_4 = 0 \\ \lambda x_1 + y_1 = \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_3 + y_3 \end{cases}$

Ce qui implique $\lambda x + y \in F$

Ainsi F est un sev de E.

• Determinons une base de F.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 & (1) \\ x_1 = x_2 + x_3 & (2) \end{cases}$