*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

# Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 - 2011

Corrections d'exercices de la Feuille 2

## Intégrales multiples

(1) (*) Calculer $\iint_\Delta \frac{dxdy}{x^2y}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

**Proof:** On a $\iint_\Delta \frac{dxdy}{x^2y} = \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \int_0^1 \frac{1}{y}dy$ or $\int_0^1 \frac{1}{y}dy$ n'existe pas (critère de Riemann). On conclue donc que $\iint_\Delta \frac{dxdy}{x^2y}$ n'existe pas. □

(2) (*) Calculer $\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^2}$ où $\Delta = [0,1[^2$.

**Proof:** On a $\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^2} = \int_0^1 \left[-\frac{1}{(1+x+2y)}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{1+2y}dy - \int_0^1 \frac{1}{2+2y}dy = \frac{1}{2}\left[\ln(1+2y)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(2+2y)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. □

(3) (*) Calculer $\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^2}$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in [0,1[^2, x \leq y\right\}$.

**Proof:** Le théorème de Fubini nous permet d'écrire, comme l'intégrale est définie, que $\iint_\Delta \frac{dxdy}{(1+x+2y)^2} = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{(1+x+2y)^2}dxdy = \int_0^1 \left[-\frac{1}{(1+x+2y)}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{1+2y}dy - \int_0^1 \frac{1}{1+3y}dy = \frac{1}{2}\left[\ln(1+2y)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\ln(1+3y)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(4)$. □

(4) (**) Calculer $\iint_\Delta \frac{x}{x+y}dxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x^2 \leq 1\right\}$.

**Proof:** En tracant $\Delta$, on s'apercoit que l'on peut paramétrer $\Delta$ par $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1], 0 \leq y \leq x^2\right\}$. Il vient donc, par le théorème de Fubini, $\iint_\Delta \frac{x}{x+y}dxdy = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} \frac{x}{x+y}dydx = \int_{-1}^1 x\left[\ln(x+y)\right]_0^{x^2} dx = \int_{-1}^1 x\ln(1+x)dx$. Au moyen d'une IPP, on remarque que $\int_{-1}^1 x\ln(1+x)dx = \left[x\left((1+x)\ln(1+x) - x\right)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left((1+x)\ln(1+x) - x\right)dx$ et donc que $\int_{-1}^1 x\ln(1+x)dx = \ln(2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \ln(1+x)dx$. Nous avons donc $\iint_\Delta \frac{x}{x+y}dxdy = \ln(2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \ln(1+x)dx = \ln(2) - \frac{1}{2}\left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_{-1}^1 = 1$ (Nous avons utilisé le fait que $u\ln(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$). □

(5) (**) Calculer $\iint_\Delta \frac{1}{a^2+x^2+y^2}dxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in [0,\infty[^2, x^2+y^2 \leq a^2\right\}$ avec $a > 0$ fixé.

**Proof:** En tracant $\Delta$, on peut s'apercevoir que le domaine est un quart de cercle. Il convient donc d'utiliser les coordonnées polaires. On procède au changement de variables $x = r\cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. De plus, il faut respecter les conditions $x = r\cos(\theta) > 0$ et $y = r\sin(\theta) > 0$, ce qui implique $\theta \in [0, \pi/2]$. On a également $0 \leq r \leq a$. Le determinant du Jacobien associé à ce changement de variable est $r$. Le domaine $\Delta$ s'écrit alors $\left\{(r,\theta) \in [0,\infty[^2, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/2\right\}$. Il vient donc $\iint_\Delta \frac{1}{a^2+x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{r}{a^2+r^2}drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\ln(a^2+r^2)\right]_0^a d\theta = \frac{\pi}{4}\ln(2)$. $\square$

(6) (*) Calculer $\iint_\Delta \cos(x+y)dxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in [0,\infty[^2, x+y \leq 1\right\}$.

**Proof:** On peut parametrer $\Delta$ par $\left\{(x,y) \in [0,\infty[^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\right\}$. Il vient donc $\iint_\Delta \cos(x+y)dxdy = \int_0^1\int_0^{1-x}\cos(x+y)dydx = \int_0^1 [\sin(x+y)]_0^{1-x} dx = \sin(1) - [\cos(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1) + 1$. $\square$

(7) (*) Calculer $\iiint_\Delta (x+y)zdxdydz$, puis $\iiint_\Delta \cos(x+y+2z+1)dxdydz$, où $\Delta = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty[^3, x+y+2z \leq 2\right\}$.

**Proof:** Il nous faut commencer par reparametrer $\Delta$. On peut tracer $\Delta$ ou raisonner directement pour trouver $\Delta = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty[^3, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 2-2z, 0 \leq x \leq 2-2z-y\right\}$. Il vient alors, pour la première intégrale, $\iiint_\Delta (x+y)zdxdydz = \int_0^1 z\int_0^{2-2z}\int_0^{2-y-2z}(x+y)dxdydz = 2/15$ après de simples intégrations successives. Pour la deuxième intégrale, on procède de la même manière pour trouver $\iiint_\Delta \cos(x+y+2z+1)dxdydz = \int_0^1\int_0^{2-2z}\int_0^{2-y-2z}\cos(x+y+2z+1)dxdydz = \frac{1}{2}\sin(3) + \cos(3) + \frac{1}{2}\sin(1) - 1$. $\square$

(8) (*) Calculer $\iint_\Delta x\sin(xy)dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in ]0,1/2[\times]0,\pi/2[\}$.

**Proof:** On a $\iint_\Delta x\sin(xy)dxdy = \int_0^{1/2} x\int_0^{\pi/2}\sin(xy)dydx = \int_0^{1/2} x\left[-\frac{1}{x}\cos(xy)\right]_0^{\pi/2} dx = \int_0^{1/2} 1 - \cos(\frac{\pi x}{2})dx = \left[-\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi x}{2})\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{2\pi}$. $\square$

(9) (**) Calculer $\iint_\Delta xydxdy$ où $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

**Proof:** On s'apercoit que le domaine est un cercle de rayon 1, on passe donc en polaires. Il vient donc $\iint_\Delta xydxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta dr$. Or $\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = \left[\sin^2(\theta)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$. D'où $2\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = 0$ et par conséquent, $\iint_\Delta xydxdy = 0$. $\square$

(10) (**) Calculer $\iiint_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}dxdydz$ où $\Delta = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty[^3, x+y+z \leq 1\right\}$ (On pourra poser $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$).

**Proof:** On pose $u = x+y+z$, $uv = z+y$ et $z = uvw$. Il vient donc $u = x+y+z$, $v = \frac{z+y}{x+y+z}$ et $w = \frac{z}{z+y}$ (on voit avec ces expressions que ce changement de variables est bien un $C^1$-difféomorphisme). Le déterminant du jacobien de ce changement de variables est $u^2v$. Il convient maintenant de trouver l'image du domaine $\Delta$. Comme $u = x+y+z \leq 1$, on a $0 \leq u \leq 1$. Comme $v = \frac{z+y}{x+y+z} \leq 1$, on a $0 \leq u \leq 1$ car $uv = z+y \leq 1 \Rightarrow v \leq \frac{1}{u}$ et $\frac{1}{u} \geq 1$. Comme $w = \frac{z}{z+y}$, on a $0 \leq u \leq 1$. Il vient donc $\Delta = \left\{(u,v,w) \in [0,1]^3\right\}$. On a alors $\iiint_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 u^3v^3w^3dwdvdu = \left[\int_0^1 u^3du\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$. $\square$

(11) (**) Calculer $\iiint_\Delta xyzdxdydz$ où $\Delta = \left\{(x,y,z) \in [0,\infty[^3, x+y+z \leq 1\right\}$.

**Proof:** On peut parametrer $\Delta$ par $\left\{(x,y,z)\in[0,\infty[^3, 0\leq x\leq 1-y-z, 0\leq y\leq 1-z, 0\leq z\leq 1\right\}$. Il vient alors $\iiint_\Delta xyzdxdydz=\int_0^1 z\int_0^{1-z} y\int_0^{1-y-z} xdxdydz$, qui après intégrations successives nous donne $\iiint_\Delta xyzdxdydz=\frac{1}{720}$. $\square$

(12) (**) Déterminer l'ensemble des valeurs de $\alpha$ telles que $I_\alpha=\int_1^\infty\int_1^\infty(x+y)^\alpha dxdy$ existe, auquel cas, calculer $I_\alpha$. Même question pour $J_\alpha=\int_0^1\int_0^1(x+y)^\alpha dxdy$.

**Proof:** On a $I_\alpha=\int_1^\infty\int_1^\infty(x+y)^\alpha dxdy=\int_1^\infty[A]\,dy$ avec $A=\int_1^\infty(x+y)^\alpha dx$. Pour que $A$ existe, il faut que $\alpha>1$ (critère de Riemann). Or $A=\left[\frac{(x+y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty=\frac{(1+y)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. Soit maintenant $B=\int_1^\infty\frac{(1+y)^{1-\alpha}}{\alpha-1}dy$. Toujours d'après le critère de Riemann, $B$ n'existe que si $\alpha-1>1\Leftrightarrow\alpha>2$. $I_\alpha$ n'existe donc que si $\alpha>2$ et vaut dans ce cas $\frac{2^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$.

Traitons maintenant le cas de $J_\alpha$. On a $J_\alpha=\int_0^1\int_0^1(x+y)^\alpha dxdy=\int_0^1[C]\,dy$ avec $C=\int_0^1(x+y)^\alpha dx$. Or $C=\int_0^1(x+y)^\alpha dx$ n'existe que si $-\alpha<1\Leftrightarrow\alpha>-1$ et vaut dans ce cas $C=\frac{(1+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Soit maintenant $D=\int_0^1\frac{(1+y)^{\alpha+1}}{\alpha+1}dy-\int_0^1\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}dy$. La première intégrale existe toujours et vaut $\frac{2^{\alpha+2}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. La deuxième n'existe que si $-\alpha-1<1\Leftrightarrow\alpha>-2$. $I_\alpha$ n'existe donc que si $\alpha>-1$ et vaut dans ce cas $\frac{2^{2+\alpha}-1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. $\square$

(14) (***) Calculer le volume de l'ensemble $\Delta=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x^2+z^2\leq a^2, y^2+z^2\leq a^2\right\}$ avec $a>0$ (on pourra commencer par tracer $\Delta$).

**Proof:** On effectue un changement de variable en polaire dans le plan $(x,y)$ et on obtient $\iiint_\Delta dxdydz=\int_{-a}^a 4(a^2-z^2)dz=\frac{16}{3}a^3$. $\square$

(15) (***) Pour $(a,b)\in]1,\infty[^2$, calculer $\int_0^\pi\ln\left(\frac{a-\cos(t)}{b-\cos(t)}\right)dt$ (on pourra introduire la fonction à deux variables $(u,t)\mapsto(u-\cos(t))^{-1}$ et utiliser le Théorème de Fubini).

**Proof:** Remarquons que l'on a $\int_0^\pi\ln\left(\frac{a-\cos(t)}{b-\cos(t)}\right)dt=\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt$ où $\int g(u,t)du=\ln(u-\cos(t))$. On peut appliquer le théorème de Fubini et on obtient $\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\int_0^\pi\frac{1}{u-\cos(t)}dtdu$. Posons $v=\tan^2(t/2)$, on a $dt=\frac{2dv}{1+v^2}$. On sait également que dans ce cas la, $cos(t)=\frac{1-v^2}{1+v^2}$. On a donc $\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\int_0^\infty\frac{1}{u-\frac{1-v^2}{1+v^2}}\frac{2}{1+v^2}dvdu=\int_a^b\frac{2}{u-1}\int_0^\infty\frac{1}{1+\frac{u+1}{u-1}u^2}dvdu$. On procede maintenant au changement de variables $w=\sqrt{\frac{u+1}{u-1}}v$, avec $dv=\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}dw$. Il vient $\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\frac{2}{u-1}\int_0^\infty\frac{1}{1+\frac{u+1}{u-1}u^2}dvdu=\int_a^b\frac{2}{u-1}\int_0^\infty\frac{1}{1+w^2}\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}dwdu=\int_a^b\frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}du$. On reconnait la dérivée de l'arccosinus hyperbolique et il vient donc $\int_0^\pi\int_a^b g(u,t)dudt=\int_a^b\frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}du=\pi\left[\text{arcch}(u)\right]_a^b=\pi\left[\ln(u+\sqrt{u^2-1})\right]_a^b=\pi\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{b+\sqrt{b^2-1}}\right)$. $\square$

(16) (**) Calculer le volume d'une boule de rayon $r>0$ dans $\mathbb{R}^3$.

**Proof:** Soit $I$ ce volume. On a $I = \iiint_B dxdydz$, où $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq r^2\right\}$. On passe en coordonnées sphériques en effectuant le changement de variables $x = u\sin(\theta)$, $y = u\sin(\theta)\cos(\alpha)$ et $z = u\sin(\theta)\sin(\alpha)$ avec $-r \leq u \leq r$, $\theta \in [0,\pi]$ et $\alpha \in [0,\pi]$. Le determinant du Jacobien de ce changement de variables est $u^2\sin(\theta)$. Il vient donc $I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_{-r}^r u^2\sin(\theta) du d\theta d\alpha = 2\pi(\frac{2}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$. $\square$