UNIVERSITÉ PARIS 1
PANTHÉON SORBONNE

Licence MASS 2014 – 2015

TD du cours Analyse S4

Feuille 1
Intégrales multiples

Dans les exercices (1) à (4) nous intégrons sur un carré.
(1) Vérifions que l'on peut appliquer Fubini. Pour tout $(x, y) \in \Delta$, nous avons

$$\left|x^2y^3 - 2y\right| \leq \left|x^2y^3\right| + 2\,|y| \leq 3$$

et

$$\int\int_\Delta \left|x^2y^3 - 2ydxdy\right| \leq \int\int_\Delta 3dxdy \leq 3$$

Appliquons Fubini :

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta x^2y^3 - 2ydxdy &= \int_0^1 dy \int_0^1 x^2y^3 - 2ydx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}y^3 - 2ydy \\ &= \frac{1}{12} - 1\end{aligned}$$

(2) Vérifions que l'on peut appliquer Fubini. Utilisons l'inégalité :

$$(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

Donc pour tout (x, y) nous avons

$$\left|1 - x^2 + 2y\right|^2 \leq 3 + 3x^4 + 12y^2 \leq 3 + 3 * 16 + 12 * 4 \leq 99$$

Donc

$$\int\int_\Delta (1 - x^2 + 2y)^2 dxdy \leq \int\int_\Delta 99dxdy \leq 99 * 4 \leq 396$$

Appliquons Fubini :

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta (1 - x^2 + 2y)^2 dxdy &= \int_0^2 dx \int_0^2 \left(1 + x^4 + 4y^2 - 2x^2 + 4y - 4x^2y\right) dy \\ &= \int_0^2 2 + 2x^4 + \frac{32}{3} - 4x^2 + 8 - 8x^2dx \\ &= 4 + \frac{64}{5} + \frac{64}{3} - \frac{32}{3} + 16 - \frac{64}{3}\end{aligned}$$

(3) Pour tout $(x, y) \in \Delta$, $x \exp(-xy) \geq 0$. On peut donc appliquer Fubini.

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta x\exp(-xy)dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^1 x\exp(-xy)dy \\ &= \int_0^1 dx\,[-\exp(-xy)]_0^1 \\ &= \int_0^1 (1 - \exp(-x))\,dx \\ &= 1 + [\exp(-x)]_0^1 \\ &= \exp(-1)\end{aligned}$$

(4) Vérifions que l'on peut appliquer Fubini : pour tout $(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$

$$|\cos(x + y)| \leq 1.$$

Donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x+y)|\, dxdy \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dxdy \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Methode 1 : Appliquons Fubini.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dy\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left[\sin(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\Big)\, dx\\ &= \Big[\cos(x) - \cos(x+\frac{\pi}{2})\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 0-(-1)-1+0 = 0\end{aligned}$$

Méthode 2 : Appliquons un changement de variable. Posons

$$\begin{cases} u = x+y\\ v = y\end{cases}$$

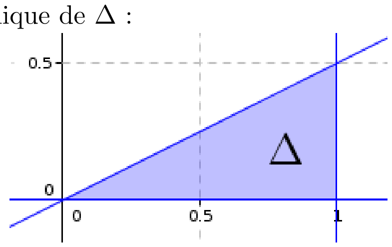
C'est un difféomorphisme. Déterminons le jacobien.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$|J| = 1$

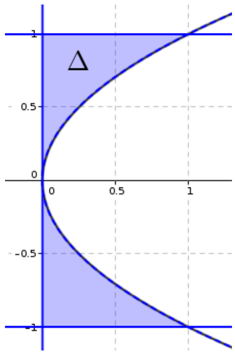
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_v^{\frac{\pi}{2}+v} \cos(u)dudv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sin(u)\right]_v^{\frac{\pi}{2}+v} dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\sin(v) - \sin(v+\frac{\pi}{2})\Big)\, dv$$

(5) Voici la représentation graphique de Δ :



$$\begin{aligned}\int\int_\Delta \frac{dxdy}{(1+x-2y)^{-1}} &= \int\int_\Delta (1+x-2y)\, dxdy\\ &= \int_0^1 dy \int_{2y}^1 (1+x-2y)\, dx\\ &= \int_0^1 \Big((1-2y)^2 + \frac{1}{2}(1-4y^2)\Big)\, dy\\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - 4y - 2y^2\right) dy\\ &= \frac{3}{2} - 2 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

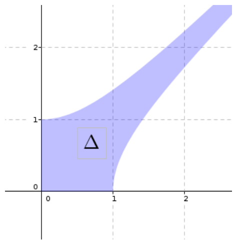
(6) Voici la représentation graphique de Δ :



Il est plus judicieux d'intégrer tout d'abord par rapport à y car la fonction $y \mapsto \frac{y}{2x+y^2}$ est une fonction impaire.

$$\begin{aligned}
\int\int_\Delta \frac{y}{2x+y^2} dxdy &= \int_{-1}^{1} dy \int_0^{y^2} \frac{y}{2x+y^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} \left[\ln\left(x+\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^{y^2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} \left(\ln\left(\frac{3y^2}{2}\right) - \ln\left(\frac{y^2}{2}\right)\right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{y}{2} \ln(3)\, dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

(7) Voici la représentation graphique de Δ dans le cas où $a = 1$:



Sans perte de généralité, on va calculer cette intégrale pour $a = 1$.

$$I := \int\int_\Delta \frac{xy}{a^2+x^2-y^2} dxdy$$

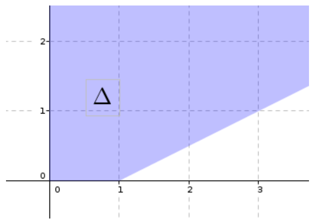
La fonction à intégrer est une fonction positive. On peut donc appliquer Fubini.

On va montrer que l'intégrale diverge. Introduisons un sous ensemble de Δ :

$$\Delta' = \{x \geq 0, y \geq 0, -1 \leq x^2 - y^2 \leq 1, x \geq y\}$$

$$\begin{aligned}
I &\geq \int\int_{\Delta'} \frac{xy}{1+x^2-y^2} dxdy \\
&\geq \int_0^{+\infty} \int_y^{\sqrt{y^2+1}} \frac{xy}{1+x^2-y^2} dxdy \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y \left[\ln\left(1+x^2-y^2\right)\right]_y^{\sqrt{y^2+1}} dy \\
&\geq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y \ln(2) dy
\end{aligned}$$

(8) Voici la représentation graphique de Δ :



$$\int\int_{\Delta} \cos(x+y)\exp(-x-2y)dxdy$$

La fonction à intégrer n'est pas positive. Majorons. Pour tout $(x,y) \in \Delta$,

$$|\cos(x+y)\exp(-x-2y)| \leq \exp(-x-2y).$$

$$\begin{aligned}\int\int_{\Delta} \exp(-x-2y)dxdy =& \int_0^{+\infty}\int_0^{2y+1} \exp(-x-2y)dxdy \\ =& \int_0^{+\infty} \exp(-2y)\int_0^{2y+1} \exp(-x)dxdy \\ =& \int_0^{+\infty} \exp(-2y)\left(1-\exp(-2y-1)\right)dy \\ =& \int_0^{+\infty} \left(\exp(-2y)-\exp(-4y-1)\right)dy \\ =& \frac{1}{2}-\frac{1}{4e} < \infty\end{aligned}$$

Calculons I de plusieurs façons.

Méthode 1 : Appliquons le changement de variable

$$\begin{cases} u =& x+y \\ v =& x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x =& 2u-v \\ y =& v-u \end{cases}$$

On calcule le jacobien :

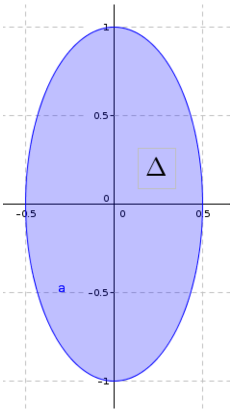
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $|J| = 1$.

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq& u \\ 2u \geq& v \\ 4u-3v \leq& 1 \end{cases}$$

$$I = \int\int \cos(u)\exp(v)dudv$$

(9) Voici la représentation graphique de Δ :



$$\int\int_{\Delta} xydxdy$$

(10) Calculons l'intégrale

$$I := \int\int_{\Delta} xyzdxdydz$$

où $\Delta = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Le domaine d'intégration est un sous ensemble de $\mathbf{R}^3$. Majorons : pour tout $(x, y, z) \in \Delta$

$$xyz < 1,$$

et $\int\int\int_{\Delta} 1dxdydz \leq 1$. Appliquons Fubini

$$(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < & x < 1 \\ 0 < & y < 1 - x \\ 0 < & z < 1 - x - y \end{cases}$$

$$I = \int_0 xyzdxdydz = 0$$

(11) Utilisons le changement de variable

$$\begin{cases} u = & x + y - z \\ uv = & y + 2z \\ uvw = & z \end{cases}$$

Exprimons (x, y, z) en fonction de u, v, w.

$$\begin{cases} x = & u - uv + 3uvw \\ y = & uv - 2uvw \\ z = & uvw \end{cases}$$

Feuille 2
Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1.

Posons $f_n(x) = (\sin(x))^n$ pour $x \in [0, \pi]$.

Appliquons le théorème de convergence monotone :

* Existence : Pour tout n et x, $0 \leq f_n(x) \leq 1$. Donc

$$\int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 1dx = 1.$$

D'où l'existence de I_n.

* Suite décroissante : Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \in [0, 1]$; donc

$$(\sin(x))^{n+1} \leq (\sin(x))^n$$

Donc pour tout $x \in [0, \pi]$ et pour tout n , $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

* limite : pour tout $x \in [0, \pi]$, $\lim_n f_n(x) = 1_{\{\frac{\pi}{2}\}}(x)$. Cette fonction est continue par morceaux.

Les hypothèses du théorème sont satisfaites. Donc

$$\lim_n I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_n f_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1_{\{\frac{\pi}{2}\}}(x) = 0$$

Exercice 2.

Posons pour tout $x \geq 1$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Etudions la suite $J_n = \int_1^{+\infty} f_n(x)dx$.

Appliquons le théorème de convergence monotone.

* Existence : Pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) \sim \frac{1}{x^{2n-1}}$$

Donc d'après Riemann, J_n existe.

* Suite décroissante : Pour tout x,

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

Donc

$$\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Donc pour tout $x \geq 1$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

* Limite : pour tout $x \geq 1$,

$$\lim_n f(x) = 0.$$

Donc les hypothèses du théorème sont satisfaites ; on en déduit que

$$\lim_n J_n = \int_1^{+\infty} \lim_n f_n(x)dx = \int_1^{+\infty} 0dx = 0$$

Exercice 3. Posons $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{x^2+n^2}}$. Etudions la suite $K_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

Appliquons le théorème de convergence dominé.

* Existence : Pour tout n, f_n est une fonction continue sur le compact [-1; 1]. Donc K_n existe.

* Majoration : Pour tout x, n, on a :

$$\begin{aligned} n^2 &\leq x^2 + n^2 \\ \frac{1}{x^2+n^2} &\leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} &\leq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{\sqrt{x^2+n^2}} &\leq 1 \end{aligned}$$

Posons $g(x) = 1$ pour tout $x \in [-1;1]$. Donc $|f_n(x)| \leq g(x)$

g est une fonction positive, continue par morceaux et $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 1$

* limite : Soit $x \in [-1;1]$, $\lim_n f_n(x) = g(x)$. De nouveau, g est une fonction continue par morceaux.

En conclusion les hypothèses du théorème sont satisfaites. Donc

$$\lim_n K_n = \int_{-1}^{1} \lim_n f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

Comparons en calculant directement K_n. Pour cela, rappelons que pour tout réel x,

$$\text{arcsinh}'(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
K_n =& 2n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} dx \\
=& 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{n^2}+1}} dx \\
=& 2n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\
=& 2n \left(\text{arcsinh}\left(\frac{1}{n}\right) - \text{arcsinh}(0) \right) \\
=& 2n \left(\ln\left(\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2}+1}\right) - \ln(1) \right)
\end{aligned}$$

On fait un développement limité:

$$\begin{aligned}
K_n \sim& 2n \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \\
\sim& 2n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
\sim& 2n \frac{1}{n} \\
\sim& 2
\end{aligned}$$

Exercice 4. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} \left|1 - \frac{x^2}{n^2}\right|^{-n} dx$.

$$\begin{aligned}
I_n \geq& \int_0^n \frac{1}{(1-\frac{x^2}{n^2})^n} dx \\
\geq& n \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^n} dx
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
0 \leq 1 - x^2 \leq& 1 \\
0 \leq (1-x^2)^n \leq& 1 - x^2 \leq 1 \\
\frac{1}{(1-x^2)^n} \geq& \frac{1}{1-x^2} \\
\geq& \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\
\geq& \frac{1}{2(1-x)}
\end{aligned}$$

Donc
$$I_n \geq \frac{n}{2}\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx = \infty$$
Exercice 5. Même en utilisant un changement de variable, les théorème de convergence monotone et dominé ne nous permettent pas de conclure. Il nous faut calculer l'intégrale par intégration par partie ou en utilisant les formules de Moivre. Posons $I_n := \int_0^{+\infty} \cos(nx)\exp(-x)dx$.
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\exp(-x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)\exp(-x)dx \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{-1}{n}\cos(nx)\exp(-x)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{n^2}I_n \\ &= \frac{1}{n^2+1} \end{aligned}$$
On en déduit que $\lim_n I_n = 0$.
Exercice 6. Appliquons le théorème de convergence dominé :
* Existence : f est bornée donc il existe un réel M tel que pour tout réel positif x, $|f(x)| \leq M$.
$$|\exp(-nx)f(x)| \leq M\exp(-nx)$$
or $\int_0^{+\infty} M\exp(-nx)dx = \frac{M}{n}$. D'où l'existence de l'intégrale.
* Majoration : Posons $g(x) = M\exp(-x)$. Pour tout entier n et pour tout réel positif x,
$$\exp(-nx)f(x) \leq g(x).$$
g est une fonction positive, continue par morceaux et
$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = M < +\infty.$$
* Limite : Pour tout réel positif x,
$$\lim_n \exp(-nx)f(x) = 1_{\{0\}}f(0).$$
Cette fonction est une fonction continue par morceaux.
Les hypothèses du théorème sont vérifiées ; on en conclut
$$\lim_n \int_0^{+\infty} \exp(-nx)f(x)dx = \int_0^{+\infty} 1_{\{0\}}f(0)dx = 0$$
Exercice 7. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}dx$. En appliquant un changement de variable, on obtient
$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a_n}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+\frac{x^2}{a_n^2}}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{f(a_n x)}{1+x^2}dx \end{aligned}$$
Appliquons le théorème de convergence dominé.
* Existence : f est une fonction bornée donc il existe un réel positif M tel que pour tout réel positif x, $|f(x)| < M$.
$$\left|\frac{a_n f(x)}{a_n^2+x^2}\right| \leq \frac{Ma_n}{a_n^2+x^2}$$

Donc d'après Riemann, I_n existe.

* Majoration : Posons $g(x) = \frac{M}{1+x^2}$.

$$\frac{f(a_n x)}{1+x^2} \leq g(x)$$

g est une fonction positive, continue par morceaux et

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty.$$

* Limite : En utilisant la continuité de la fonction f

$$\lim_n \frac{f(a_n x)}{1+x^2} = \frac{f(0)}{1+x^2}.$$

Cette fonction est une fonction continue par morceaux.

Les hypothèses du théorème sont satisfaites ; on en conclut

$$\lim_n I_n = \int_0^{\infty} \frac{f(0)}{1+x^2} dx = f(0)\frac{\pi}{2}$$

Exercice 8.

Exercice 9. Soit a et b des réels tel que $0 < a < b$. Posons $I =]a, b[$, $J =]0, 1[$ et pour tout $(x, t) \in I \times J$,

$$f(x, t) = \ln(x^2 + t^2).$$

f est une fonction continue, admettant une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2x}{x^2 + t^2}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction continue sur $I \times J$ Posons pour $t \in J$, $g_0(t) := \ln(b^2 + 1) + \left|\ln(a^2)\right|$ et $g_1(t) = \frac{2b}{a^2}$. g_0 et g_1 sont des fonctions positives et continues tel que pour tout $(x, t) \in I \times J$.

$$|f(x, t)| \leq g_0(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq g_1(t).$$

De plus, $\int_J g_0(t)dt < +\infty$ et $\int_J g_0(t)dt < +\infty$. Conclusion : F est de classe C^1 sur $I = [a, b]$. a et b sont arbitraire. Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$. De même on montre que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.

Exercice 10.

Exercice 11. Posons $F(x) = g(x) + f^2(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) =& g'(x) + 2f(x)f'(x) \\ =& \int_0^1 -2(t^2+1)x\frac{\exp\left(-(t^2+1)x^2\right)}{t^2+1} + 2\exp(-x^2)\int_0^x \exp(-t^2)dt \\ =& 0 \end{aligned}$$

Donc $F(x) = F(0)$. Or

$$F(0) = g(0) + f^2(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 12. (a) Soit $y > x$. Alors $-ty < -tx$ donc $|f(t)|\exp(-ty) < |f(t)|\exp(-tx)$. Donc si $\int_0^{+\infty} |f(t)|\exp(-tx)dt < +\infty$ alors $\int_0^{+\infty} |f(t)|\exp(-ty)dt < +\infty$. On en conclut que l'ensemble de définition de Lf est de la forme $(a; +\infty[$ avec $a \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}$.

(b)

Exercice 13.

Feuille 3

Equations différentielles linéaires

Exercice 1.
Exercice 2.
Exercice 3.
Exercice 4.
Exercice 5. Résolvons $y'' - 4y = 0$. L'equation caractéristique $r^2 - 4 = 0$ admet $r = 2$ ou $r = -2$ pour solution. Donc les solutions sont $y = a\exp(2x) + b\exp(-2x)$.

Résolvons $y'' + 9y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ admet $r = 3i$ ou $r = -3i$ pour solution. Donc les solutions sont $y = a\cos(3x) + b\sin(3x)$

Résolvons $y'' - 4y' + 4y = -2$. Tout d'abord résolvons l'équation homogène : $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet $r = 2$ pour solution. Donc les solutions de l'équation homogène sont $y = (a + bt)\exp(2x)$. Cherchons une solution particulière : $y = -\frac{1}{2}$ est solution. Donc les solutions sont $y = (a + bt)\exp(2x) - \frac{1}{2}$

Résolvons $3y^{(3)} - 2y'' - y = x$. Tout d'abord résolvons léquation homogène. L'équation caractéristique $3r^3 - 2r^2 - 1 = (r - 1)(3r^2 + r + 1) = 0$ admet $r = 1$, $r = \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{11}i)$ et $r = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{11}i)$ comme solution. Donc les solutions sont $y = a\exp(x) + b\cos(\frac{\sqrt{11}}{3})\exp(-\frac{x}{3}) + c\sin(\frac{\sqrt{11}}{3})\exp(-\frac{x}{3})$ Une solution particulière : comme tous les coefficients sont des polynômes, on cherche une solution particulère sous la forme d'un polynôme. On trouve $y = -x$. Conclusion : $y = -x + a\exp(x) + b\cos(\frac{\sqrt{11}}{3})\exp(-\frac{x}{3}) + c\sin(\frac{\sqrt{11}}{3})\exp(-\frac{x}{3})$

Résolvons $y'' - y' - 2y = 2 - \exp(x)$. Equation homogène : L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet $r = -1$ et $r = 2$ comme solution. Donc $y = a\exp(-x) + b\exp(2x)$. Solution particulière : $y = -1$ est solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2$. Cherchons une solution particulière de $y'' - y' - 2y = \exp(x)$ sous la forme $y = k\exp(x)$ $y'' - y' - 2y = \exp(x)(k - k - 2k)$. On cherche donc k tq $-2k = 1$ donc $k = -\frac{1}{2}$. Donc $y = -1 + \frac{1}{2}\exp(x)$ est une solution particulière de $y'' - y' - 2y = 2 - \exp(x)$. Conclusion : $y = -1 + \frac{1}{2}\exp(x) + a\exp(-x) + b\exp(2x)$

Résolvons $y'' + 4y = \cos(2x)$. Equation homogène : $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. Solution particulière : On la recherche sous la forme $y = ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$. $y' = (a + 2bx)\cos(2x) + (-2ax + b)\sin(2x)$ $y'' = (2b - 4ax + 2b)\cos(2x) + (-2a - 4bx - 2a)\sin(2x)$ $y'' = (4b - 4ax)\cos(2x) + (-4a - 4bx)\sin(2x)$ $y'' + 4y = 4b\cos(2x) - 4a\sin(2x)$ Donc $4b = 1$ et $-4a = 0$ $y = \frac{1}{4}\sin(2x)$ est solution particulière. Conclusion : Les solutions sont $y = \frac{1}{4}\sin(2x) + a\cos(2x) + b\sin(2x)$.

Résolvons $y^{(4)} + y = \exp(x)$. Equation homogène : l'équation caractéristique $r^4 + 1 = (r - \exp(\frac{i\pi}{4}))(r - \exp(\frac{-i\pi}{4}))(r - \exp(\frac{i3\pi}{4}))(r - \exp(\frac{-i3\pi}{4}))$ les solutions sont $y = a\cos(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{x}{\sqrt{2}}) + b\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c\cos(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{-x}{\sqrt{2}}) + d\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{-x}{\sqrt{2}})$ Solution particulière : Cherchons une solution particulière sous la forme $y = k\exp(x)$. $y^{(4)} + y = 2k\exp(x)$ donc $2k = 1$ donc $y = \frac{1}{2}\exp(x)$ est solution particulière. Conclusion : $y = \frac{1}{2}\exp(x) + a\cos(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{x}{\sqrt{2}}) + b\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c\cos(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{-x}{\sqrt{2}}) + d\sin(\frac{x}{\sqrt{2}})\exp(\frac{-x}{\sqrt{2}})$

Résolvons $y'' + y' + y = \exp(\frac{-x}{2})$ Equation homogène : $r^2 + r + 1 = (r - j)(r - j^2)$ $y = a\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2})$. Solution particulière : cherchons la sous la forme $y = k\exp(\frac{-x}{2})$ $y'' + y' + y = (\frac{k}{4} - \frac{k}{2} + k)\exp(\frac{-x}{2})$ Donc $\frac{3k}{4} = 1$ Conclusion : $y = \frac{4}{3}\exp(-\frac{x}{2}) + a\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2})$.
Exercice 6.
Exercice 7. Résolvons $xy'' + 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$. Posons $z = xy$ $z' = y + xy'$ $z'' = 2y' + xy''$ donc z solution de $z'' + z' + z = 0$ Donc $z = a\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2}) + b\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2})$. Donc $y = \frac{a}{x}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2}) + \frac{b}{x}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})\exp(-\frac{x}{2})$.

Résolvons $x^2y'' + y = 0$. Posons $t = \ln(x)$ et $z(t) = y(\exp(t))$ $z' = \exp(t)y'(\exp(t))$
$z'' = \exp(t)y'(\exp(t)) + y''(\exp(t))\exp(2t)$. On obtient $z'' - z' + z = 0$. $r^2 - r + 1 = (r - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i))(r - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)) = 0$ $z = a\cos(\frac{\sqrt{3}t}{2})\exp(\frac{1}{2}t) + b\sin(\frac{\sqrt{3}t}{2})\exp(\frac{1}{2}t)$ $y = a\cos(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2})\exp(\frac{1}{2}\ln(x)) + b\sin(\frac{\sqrt{3}\ln(x)}{2})\exp(\frac{1}{2}\ln(x))$

Exercice 8. Résolvons $xy'' - y' - 4x^3y = 0$. Vérifons que $y = \exp(x^2)$ est solution. $y' = 2xy$ $y'' = 2y + 4x^2y$ Donc $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ Cherchons une deuxième solution sous la forme $u = zy$ $u' = z'y + zy'$ $u'' = z''y + 2z'y' + zy''$ Or u solution. Donc $xu'' - u' - 4x^3u = 0$ i.e. $x(z''y + 2z'y' + zy'') - (z'y + zy') - 4x^3zy = 0$ Or y solution. $x(z''y + 2z'y') - z'y = 0$ Résolvons $xyw' + (2xy' - y)w = 0$ $x\exp(x^2)w' + (4x^2\exp(x^2) - \exp(x^2))w = 0$ $xw' + (4x^2 - 1)w = 0$ $w = \exp(-2x^2) + x$ or $z' = w$ donc $z = x^2 + \int \exp(-2t^2)$ donc $u = yx^2 + y\int \exp(-2t^2)$
Conclusion : $y = au + b\exp(x^2)$
Exercice 9.
Exercice 10. Résolvons $x^2y'' - 2xy' + 2y = -1$ $y = x$ est solution de l'équation homogène. Cherchons une solution de la forme $u = xz$ $u' = z + xz'$ $u'' = 2z' + xz''$ or u solution. Donc $x^2u'' - 2xu' + 2u = 0$ $x^2(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = 0$ $x^2(2z' + xz'') - 2x^2z' = 0$ $x^3z'' = 0$ $z = x$ $u = x^2$ Donc la solution générale de l'équation homogène est $y = ax + bx^2$ Cherchons une solution particulière. $y = -\frac{1}{2}$ est solution.
Conclusion $y = -\frac{1}{2} + ax + bx^2$
Exercice 11.
Exercice 12. Posons $y' = u(y)$. Donc $y'' = u'(y)y' = u'(y)u(y)$ $u'(y)u(y) = u(y)y^2$ $u'(y) = y^2$ $y' = \frac{1}{3}y^3 + a$ or $y(0) = 1$ et $y'(0) = \frac{1}{3}$ donc $a = 0$. $\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2y^2(0)} - \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x$ $\frac{1}{y^2} = 1 - \frac{2}{3}x$ $y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}x}}$

Nom :

Interrogation du 10 février
Sujet A

Utilisation du crayon à papier interdit. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [6 points]
On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 3t + 2}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de l'intégrale

$$A = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que l'intégrale est convergente.
3. Calculer A.

Université Paris 1 2014 – 2015
L2 MASS – TD 2 Interrogation 1

Nom :

Interrogation du 10 février

Sujet B

Aucun prêt de calculatrice n'est autorisé. Le barême est donné à titre indicatif.
Utilisation du crayon à papier interdit. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [6 points]
On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 5t + 6}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de l'intégrale

$$B = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Montrer que l'intégrale est convergente.
3. Calculer B.

Nom :

Interrogation du 10 février
Sujet A

Utilisation du crayon à papier interdit. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [6 points]
On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$, où f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier de deux manières

$$\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$$

Méthode directe

1. Calculer $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$. En déduire $\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

Méthode convergence dominée

2. Tracer la représentation graphique de f_2.
3. Appliquer le théorème de convergence dominée pour retrouver le résultat de la première question.

Université Paris 1 | 2014 – 2015
L2 MASS – TD 2 | Interrogation 2

Nom :

Interrogation du 10 février
Sujet B

Aucun prêt de calculatrice n'est autorisé. Le barême est donné à titre indicatif.
Utilisation du crayon à papier interdit. Vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [6 points]
On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$, où f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier de deux manières

$$\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$$

Méthode directe

1. Calculer $\int_{-1}^{1} f_n(x)dx$. En déduire $\lim_n \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

Méthode convergence dominée

2. Tracer la représentation graphique de f_2.
3. Appliquer le théorème de convergence dominée pour retrouver le résultat de la première question.