1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Résumé

C'est une équation de la forme

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

L'équation homogène associée est

$$(E') : y' + a(x)y = 0$$

On a deux méthodes pour chercher la fonction $x \mapsto y(x)$ solution de (E).

1. Formule à retenir

   Théorème 1. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

   $$y(x) = e^{-\int^x a(t)dt}\left(\int^x b(u)e^{\int^u a(t)dt}du + K\right)$$

2. Méthode de Variations des Constantes . Voici la procédure

   (a) Résoudre l'équation homogène (E'), en sachant

   $$\frac{y'}{y} = -a(x)$$

   (b) Poser $\lambda y(x)$ la solution de (E), puis remplacer y dans (E) par $\lambda(x)y(x)$

   (c) Normalement, on trouvera une nouvelle équation différentielle de la forme

   $$\lambda'(x) = c(x)$$

   (d) La solution de (E) est

   $$\lambda(x)y(x)$$

1.2 Exercices

Exercice 1 (Premier ordre sans second membre : Exo 1 de la feuille 4). Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(0) = 0$.

1. $y' + 2y = 0$. Donc $\frac{y'}{y} = -2$. Ce qui donne

   $$\begin{aligned}\ln|y| &= -2x + C\\ |y| &= e^{-2x+C}\\ y &= \pm e^{-2x+C}\end{aligned}$$

   Donc

   $$y(x) = \lambda e^{-2x}$$

   Pour trouver la valeur de λ, on utilise la condition initiale $y(0) = 0$. Ici, on trouve $\lambda = 0$, donc la fonction $y = 0$, mais si $y(0) = 1$ par exemple, $\lambda = 1$, donc la solution est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{-2x}$.

2. $y' - xy = 0$. Pour $x \neq 0$, $\frac{y'}{y} = x$. Donc

   $$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$$

   Si $y(0) = 0$, alors $y \equiv 0$, mais si $y(0) = 1$, $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Au départ, nous avions supposé que $x \neq 0$. Pourtant, la fonction $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc on peut raccorder la solution en 0. La solution est alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$.

3. $e^x y' + y = 0$. Donc $\frac{y'}{y} = -e^{-x}$. Ce qui donne

   $$\begin{aligned}\ln|y| &= e^{-x} + C\\ |y| &= e^{e^{-x}+C}\end{aligned}$$

   Donc

   $$y(x) = \lambda e^{e^{-x}}$$

   Si $y(0) = 0$, alors $y \equiv 0$, et si $y(0) = 1$, on doit avoir

   $$1 = \lambda e$$

   La solution est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$y(x) = e^{e^{-x}-1}$$

4. $y' + 2\ln(x)y = 0$. Donc $\frac{y'}{y} = -2\ln(x)$ (x>0). Ce qui donne

   $$\begin{aligned}\ln(|y|) &= 2(x - x\ln(x)) + C\\ &= \ln(x^{-2x}) + \ln\left(e^{2x}\right) + \ln(\lambda)\end{aligned}$$

   Donc

   $$y(x) = \lambda x^{-2x}e^{2x}$$

   La fonction $x \mapsto y(x)$ n'est pas définie en 0 mais peut être prolongé par continuité. Toutefois, la condition la condition $y(0) = 0$ n'est possible que si $y \equiv 0$. Admettons que $y(0) = 1$, alors $\lambda = 1$. Donc la solution est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

   $$y(x) = x^{-2x}e^{2x}$$

Exercice 2 (Premier ordre avec second membre : Exo 4 de la feuille 4). Déteminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec la condition initiale $y(1) = 0$.

1. $(1+x)y' = 2 - y$. L'équation homogène correspondante
$$y'(1+x) + y = 0$$
qui a pour solution
$$y(x) = \lambda \frac{1}{1+x}, x \neq -1$$
En admettant que λ soit une fonction de x et en remplaçant y de l'équation initiale par $\lambda(x)\frac{1}{1+x}$, on trouve
$$\begin{aligned}2 =&(1+x)\left(\lambda(x)\frac{1}{1+x}\right)' + \lambda(x)\frac{1}{1+x}\\ =&(1+x)\left(\lambda'(x)\frac{1}{1+x} - \lambda(x)\frac{1}{(1+x)^2}\right) + \lambda(x)\frac{1}{1+x}\\ =&\lambda'(x)\end{aligned}$$
D'où, $\lambda(x) = 2x + K' = 2x + 2 + K$ La solution générale est donc
$$2 + K\frac{1}{1+x}$$
Sachant que $y(1) = 0$, on trouve $K\frac{1}{2} + 2 = 0$, i.e.
$$y(x) = 2 - \frac{4}{1+x}, x \neq -1$$
2. $y' + yx = \cos(x)$. L'équation homogène correspondante
$$y' + xy = 0$$
Pour $x \neq 0$,
$$y = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$
En remplaçant y par $\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ dans l'équation initiale,
$$\begin{aligned}\cos(x) &= \left(\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' + x\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\\ &= \lambda'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - x\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\\ &= \lambda'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$
Comme $y(1) = \lambda(1)\sqrt{e} = 0$, alors
$$\lambda(x) = \int_1^x \cos(t)e^{\frac{t^2}{2}}dt$$
3. $2x(1-x)y' + (1+x)y = x$. L'équation homogène correspondante
$$2x(1-x)y' + (1+x)y = 0$$
Pour $x \neq 0, 1$, on a
$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -\frac{1+x}{2x(1-x)}\\ &= -\frac{1}{2x} - \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$
Donc $|y| = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) + \ln(|1-x|) + C$, ce qui donne
$$y = \begin{cases}\lambda\frac{1-x}{\sqrt{|x|}} & x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\\ \lambda\frac{x-1}{\sqrt{x}} & x > 1\end{cases}$$
Considérons le cas $x > 1$. En remplaçant y de l'équation initiale par $y = \lambda(x)\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, on trouve
$$\begin{aligned}x =&2x(1-x)\left(\lambda(x)\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)' + \lambda(x)\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\\ =&2x(1-x)\left(\lambda'(x)\frac{x-1}{\sqrt{x}} + \lambda\frac{1+x}{2x\sqrt{x}}\right) + \lambda(x)\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\\ =&-2x\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\lambda'(x)\end{aligned}$$
D'où
$$\lambda(x) = -\frac{1}{2}\int_.^x \frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}dt$$
Par une intégration par partie,
$$\begin{cases} du = \frac{1}{(t-1)^2} & u = -\frac{1}{t-1}\\ v = \sqrt{t} & dv = \frac{1}{2\sqrt{t}}\end{cases}$$
On trouve
$$\lambda(x) = \left[\sqrt{t}\frac{1}{t-1}\right]_.^x - \frac{1}{2}\int_.^x \frac{1}{2\sqrt{t}(t-1)}dt$$
Pour la deuxième intégrale, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, i.e. $dt = 2udu$. Les bornes deviennent . et x^2. Dans ce cas,
$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \frac{\sqrt{x}}{x-1} + C - \frac{1}{2}\int_.^{x^2}\frac{2udu}{2u(u^2-1)}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{x-1} + C - \frac{1}{4}\left(\int_.^{x^2}\frac{du}{u-1} - \int_.^{x^2}\frac{du}{u+1}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x}}{x-1} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

4. $x(x^2-1)y'+2y=x\ln(x)-x^2$. L'équation homogène correspondante

$$x(x^2-1)y'+2y=0$$

Pour $x\neq -1,0,1$,

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=-\frac{2}{x(x-1)(x+1)}\\&=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\\ \ln(|y|)&=\ln(x^2)+\ln\left(\frac{1}{|x-1|}\right)+\ln\left(\frac{1}{|x+1|}\right)+C\end{aligned}$$

Pour $x>0$,

$$y=\begin{cases}\lambda\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)}, & x>1\\[2ex] \lambda\dfrac{x^2}{(1-x)(x+1)}, & x\in]0;1[\end{cases}$$

Comme λ est une constante en fonction des intervalles et son signe peut être positif ou négatif, alors cette solution peut s'écrire

$$y=\lambda\frac{x^2}{x^2-1}, x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

En rempalçant y de l'équation initiale par $\lambda(x)\dfrac{x^2}{x^2-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}x\ln(x)-x^2&=x(x^2-1)\left(\lambda(x)\frac{x^2}{x^2-1}\right)+2\lambda(x)\frac{x^2}{x^2-1}\\&=x^3\lambda'(x)+\lambda(x)x\left(\frac{-2x}{x^2-1}\right)+2\left(\lambda(x)\frac{x^2}{x^2-1}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda'(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{x}$$

Ce qui donne (par IPP), pour $x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}\lambda(x)&=-\int_.^x\frac{1}{t}dt+\int_.^x\frac{\ln(t)}{t^2}dt\\&=-\ln(x)+C-\left[\ln(t)\frac{1}{t}\right]_.^x+\int_.^x\frac{dt}{t^2}\\&=-\ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+C\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution générale

$$y(x)=-\frac{x}{x^2-1}\left((1+x)\ln(x)+1+Cx\right), x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$$

Ici, la condition initiale $y(1)=0$ est impossible ! Admettons que $y(2)=1$, alors

$$\frac{3}{4}(3\ln(2)+1+2C)=0$$

Donc $C=\dfrac{3\ln(2)+1}{2}$

Exercice 3 (Premier ordre avec second membre Exo 6, feuille 4). Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E):(x^2-1)y'-y=x^2$$

L'équation homogène correspondante est

$$(x^2-1)y'-y=0$$

Pour $x\neq -1,1$,

$$\ln(|y|)=\frac{1}{2}\ln(|x-1|)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{|x+1|}\right)+C$$

D'où

$$y(x)=\begin{cases}\lambda\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}, & |x|>1\\[2ex] \lambda\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}, & |x|<1\end{cases}$$

Distingons les deux cas

1. $|x|>1$. Par la MVC, (E) devient

$$\begin{aligned}x^2&=(x^2-1)\left(\lambda(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)'-\lambda(x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\\&=(x^2-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\lambda'(x)\end{aligned}$$

D'où

$$\lambda'(x)=\frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\lambda(x)&=\int_.^x\frac{t^2dt}{(t-1)\sqrt{t^2-1}}\\&=\int_.^x t^2\frac{t+1}{t-1}\frac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}\end{aligned}$$

En posant $u=\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$, on a $du=\dfrac{dt}{(t+1)\sqrt{t^2-1}}$, $\dfrac{t-1}{t+1}=u^2$ et $t=\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$. Si

$\theta(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, on obtient

$$\lambda(x) = \int_{.}^{\theta(x)} \left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)^2 \frac{1}{u^2} du$$
$$= \int_{.}^{\theta(x)} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} du$$
$$= \left[-\frac{1}{u} + \frac{2u}{1-u^2}\right]_{.}^{\theta(x)}$$
$$= -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (1+x)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + K$$

Donc $y(x) = (x-2) + K\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

2. $|x| < 1$. On trouve

$$y(x) = ax + b + C\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Donc on peut raccorder la solution en 1 mais non en -1.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Résumé

C'est une équation de la forme

$$(E) : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

L'équation homogène associée est

$$(E') : a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

1. PREMIER CAS : a, b, c SONT DES CONSTANTES RÉLLES

   Première étape : La solution de l'équation homogène

   Notons $\pi(X) = aX^2 + bX + c$ le *polynome caractéristique* de l'équation homogène. Alors, il a **trois cas** pour les solutions de (E')

   (a) $\pi(X) = 0$ admet deux racines réelles distinctes notées r_1 et r_2. Les solutions de (E') sont de la forme

   $$y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

   (b) $\pi(X) = 0$ admet une racine double notée r. Les solutions de (E') sont de la forme

   $$y(x) = (\lambda_1 + x\lambda_2) r^{rx}$$

   (c) $\pi(X) = 0$ admet deux racines complexes disctines et conjugées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. Les solutions de (E') sont de la forme

   $$(\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$$

   Deuxième étape : La solution de l'équation avec second membre

   Nous distingons **deux cas**

   (a) **Le second membre est de la forme** $e^m T(x)$ où T est un polynome et $m \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une solution de (E) de la forme

      i. $e^{mx}Q(x)$ si m n'est pas une racine de $\pi(X) = 0$

      ii. $x^{\alpha} e^{mx} Q(x)$ si m est une racine de multiplicité α de l'équation $\pi(X) = 0$

   Dans les deux cas, $Q(x)$ est un polynome de même degré que $T(x)$

   (b) **Cas générale** : Méthodes de Variations des Constantes

2. DEUXIÈME CAS : A,B,C SONT DES FONCTIONS DE x Méthode de LAPLACE.

   Première étape : La solution de l'équation homogène

   Si $y_1(x)$ est une solution de (E'), alors il existe une fonction $k(x)$ telle que $y_2(x) = k(x)y_1(x)$ soit une solution de (E'), où k satisfait une équation différentielle du premier ordre.

   Deuxième étape : La solution de l'équation avec second membre MVC.

   Si $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ est la solution de (E'), alors la solution de (E) peut s'écrire sous la forme

   $$z(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$$

   où $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ sont liées par la raltion

   $$\lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2'(x)y_2(x) = 0$$

2.2 Exercices

Exercice 4 (Équation du second ordre à coefficients constants. Exo 7 feuille 4). Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

1. $y'' - 2y = 0$. Le polynome caractéristique $\pi(X) = X^2 - 2$. Les solutions de $\pi(X) = 0$ sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Donc, la solution de $y'' - 2y = 0$ est de la forme
$$y(x) = \lambda_1 e^{-\sqrt{2}x} + \lambda_2 e^{\sqrt{2}x}$$
Sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, on a
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \sqrt{2}(\lambda_2 - \lambda_1) & = 0 \end{cases}$$
Sous ces conditions $y \equiv 0$, mais pour $y'(0) = \sqrt{2}$ par exemple, on a
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = 1 \end{cases}$$
Dans ce cas, $y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}\right)$

2. $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x$. L'équation homogène correspondante est
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
Le polynome caractéristique $\pi(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. La solution de l'équation homogène est donc de la forme
$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$$
Cette équation a deux seconds membres 1 et $e^{mx}T(x)$.
   (a) 2^{nd} MEMBRE $= 1$, qui est de la forme $e^{mx}T(x)$ avec $m = 0$ et T le polynome de degré 0, $T(x) = 1$. Donc (E) a une solution de la forme $Q(x)$ où Q est un polynome de degré 0, i.e. $Q(x) = \alpha$. Comme Q est solution de (E), alors
$$Q'' - 3Q' + 2Q = 1$$
   Ce qui donne $2\alpha = 1$, donc $\alpha = \frac{1}{2} = Q(x)$
   (b) 2^{nd} MEMBRE $= 2e^x$, qui est de la forme $e^{mx}T(x)$ où $m = 1$ et T est un polynome de degré 0. Comme 1 est une racine simple du polynome caractéristique, alors (E) a une solution de la forme $xe^xQ(x)$ où Q est un polynome de degré 0, i.e. de la forme $\theta(x) = \beta x e^x$. Étant donnée que θ est solution de (E), alors
$$\begin{aligned} 2e^x &= \theta'' - 3\theta' + 2\theta \\ &= \beta\left((2e^x + xe^x) - 3(e^x + xe^x) + 2xe^x\right) \\ &= \beta(-e^x) \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions d'une équation différentielle du second ordre est un espace vectoriel de dimension 2, alors la solution générale de (E) est de la forme
$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x$$
Ici les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ donnent
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2 & = 0 \end{cases}$$
Ce qui donne
$$\lambda_2 = \frac{5}{2}, \lambda_1 = -3$$
D'où
$$y(x) = -3e^x + \frac{5}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x$$

3. $y'' + y' + y = \cos(x)$. Son équation homogène est $y'' + y' + y = 0$ où les racines du polynome caractéristique sont $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1}$. Donc la solution générale de l'équation homogène est
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1 \cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2 \sin(\sqrt{3}x)\right) \\ &= \lambda_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\sqrt{3}x) \end{aligned}$$
En posant,
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\sqrt{3}x) \\ y_2(x) &= e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\sqrt{3}x) \end{aligned}$$
la MVC implique que λ_1 et λ_2 sont solutions du système *(tout le temps vrai)*
$$\begin{cases} \lambda_1'(x)y_1(x) + \lambda_2'(x)y_2(x) & = 0 \\ a(\lambda_1'(x)y_1'(x) + \lambda_2'(x)y_2(x)) & = d \end{cases}$$
Ici, $a = 1$ et $d = \cos(x)$. Donc
$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\cos(\sqrt{3}x) + \lambda_2'(x)\sin(\sqrt{3}x) & = 0 \\ \lambda_1'(x)(\cos(\sqrt{3}x) - 2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)) & \\ +\lambda_2'(x)(\sin(\sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)) & = \cos(x) \end{cases}$$

La première équation donne $\lambda_1'(x) = -\tan\sqrt{3}x$, et par la méthode de substitution, la deuxième équation donne

$$2\sqrt{3}\lambda_2'(x) = \cos^2(\sqrt{3}x)$$

D'où

$$\begin{aligned}\lambda_2(x) &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\int_{.}^{x}(1+\cos(2\sqrt{3}x))dx\\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin(2\sqrt{3}x)) + K_2\end{aligned}$$

De même $2\sqrt{3}\lambda_1'(x) = -\tan(\sqrt{3}x)\cos^2(\sqrt{3}x) = -\sin(\sqrt{3}x)\cos(\sqrt{3}x)$

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= -\frac{1}{2}\int_{.}^{x}\sin(\sqrt{3}x)d\left(\frac{\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\sin^2(\sqrt{3}x) + K_1\end{aligned}$$

Exercice 5. Déterminer une solution maximale de l'équation différentielle

$$(E') : y'' + 2x + 2y = 0$$

Posons $y_1(x) = e^{-x^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}y_1'(x) &= -2xe^{x^2};\\ y_1''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\end{aligned}$$

Donc, $y_1(x)$ est une solution de (E'). Par la méthode de Laplace, on peut chercher la deuxième solution [1] en sachant qu'il existe une fonction $k(x)$ telle que la fonction suivante soit une solution de (E')

$$y_2(x) = k(x)y_1(x)$$

$$\begin{aligned}y_2'(x) &= k'y_1 - 2xky_2;\\ y''(x) &= k''y_1 - 4xk'y_1 - 2ky_1 + 4x^2ky_1\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}0 &= y_2'' + 2y_2' + 2y_2;\\ &= e^{-x^2}(k'' - 2xk')\end{aligned}$$

Posons $z = k'$. Alors,

$$z' - 2z = 0$$

Ce qui donne $z(x) = \lambda e^{2x}$. Donc $k(x) = \lambda e^{2x} + C$. La solution générale de (E') s'écrit donc

$$y(x) = \lambda_1 e^{-x^2} + \lambda_2 e^{-x^2+2x}$$

3 Séries : Généralités

3.1 Résumé

Une série entière est une fonction de la forme

$$S(Z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Z^n$$

Objectifs

1. Déterminer le rayon de convergence ;
   (a) DÉFINITION : SI LES CRITÈRES NE MARCHENT PAS
   S'il existe R tel que $|Z| < R$, $S(Z)$ converge et $|Z| > R$, $S(Z)$ diverge, alors R est le rayon de convergence de S.
   (b) CRITÈRE DE CAUCHY : a_n EST EXPRIMÉ EN FONCTION DE n SOUS FORME DE PUISSANCE, PRODUIT ETC
   Si $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$. La rayon de convergence
   $$R = \frac{1}{l}$$
   (c) CRITÈRE DE D'ALEMBERT : a_n EST EXPRIMÉ EN FONCTION DE n SOUS FORME DE SOMME, PRODUIT ETC
   Si $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. La rayon de convergence
   $$R = \frac{1}{l}$$
   (d) D.L.+ ÉQUIVALENCE : CAS GÉNÉRAL POUR a_n EN FONCTION DE n
   Généralement, cela passe par le D.L. de a_n quand $\frac{1}{n} \in \mathcal{V}(0)$
2. Donner le développement en série d'une fonction réelle ;

1. Rappellons que les solutions d'une équation différentielles d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimention 2. Si on trouve deux fonctions linéairement indépendantes, alors les autres solutions sont combinaison linéaires des ces deux fonctions.

(a) Fonctions usuelles. Par exemple :

$$e^z = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} z^n (z \in \mathbb{C});$$
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n (|z|<1);$$
$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) z^n (|z|<1)$$

(b) Cas générale : Composition de deux fonctions usuelles ou formule de Taylor.

3. Maitriser les opérations de base : somme, produit etc de plusieures séries.

3.2 Exercices

Exercice 6 (Déterminer le rayon de convergence. Exo 4 Feuille 5)**.** Déteminer le rayon de convergence de la série

1. $a_n = \dfrac{n}{2^n+n}$. L'expression de a_n en fonction nous montre que le critère de d'Alemebert est la plus facile

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{2^{n+1}+n+1}{n+1}\frac{n}{2^n+n};\\ &= \frac{n}{n+1}\frac{2^{n+1}+n+1}{2^n+n};\\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{2^n(2+\frac{n+1}{2^n})}{2^n(1+\frac{n}{2^n})}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{n+1}{2^n}, \dfrac{n}{2^n} \sim 0$ pour $n \in \mathcal{V}(+\infty)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

D'où

$$R = 2$$

2. $a_n = 1 + (-1)^n$. Donc

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2p+1;\\ 1, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n};\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} {z^2}^n;\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} Z^n (Z = z^2).\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge si et seulement $|Z|<1$ i.e. $|z|<1$.

3. $a_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln(a_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}})\right);\\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}}\ln(n) - \frac{1}{n}\ln(1-n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}});\\ &\sim \frac{1}{n\sqrt{n}}\ln(n) - \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}(n\in\mathcal{V}(+\infty));\\ &\sim 0 (n\in\mathcal{V}(+\infty))\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = 1$$

4. $a_n = \tan(\pi(\sqrt{n^2}-n))$. Rappellons que $\tan(\pi n + x) = \tan(x)$ et $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}(x)$.

$$\begin{aligned}a_n &= \tan(\pi(\sqrt{n^2}-n));\\ &= \tan\left(\pi n\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right);\\ &\sim \tan\left(\pi n\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\in\mathcal{V}(0)\right);\\ &\sim \tan\left(\pi n - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8n}\right)\left(\frac{1}{n}\in\mathcal{V}(0)\right);\\ &\sim -\text{cotan}\left(-\frac{\pi}{8n}\right)\left(\frac{1}{n}\in\mathcal{V}(0)\right);\\ &\sim \text{cotan}\left(\frac{\pi}{8n}\right)\left(\frac{1}{n}\in\mathcal{V}(0)\right);\\ &\sim \frac{8n}{\pi} - \frac{\pi}{24n}\left(\frac{1}{n}\in\mathcal{V}(0)\right).\end{aligned}$$

D'où, le rayon de convergence $R = 1$.

Exercice 7 (Convergence sur le bord. Exo 8 feuille 5)**.** Déterminer le rayon de convergence et étudier la convergence au bord.

1. $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\frac{n+2}{n+1};\\ &\sim 1 \; n\in\mathcal{V}(+\infty)\end{aligned}$$

Donc $R = 1$. Pour la convergence au bord, posons $z = e^{i\theta}, \theta \in [0; 2\pi[$. Pour $\theta = 0$, il est évident que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n^2+1}$$

est divergente.
Pour $\theta \neq 0, \pi$, en sachant que $\dfrac{n}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n}$ et

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{in\theta};\\ &= \int \sum_{n\geq 1} e^{i(n-1)\theta};\\ &= \int \frac{1}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

alors la série est convergente sur $D \setminus \{-1, 1\}$ où $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

2.

4 Séries : Applications

4.1 Résumé

4.2 Exercices