*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Première Année Master M.A.E.F.** 2013 – 2014

# Econométrie II

Correction du Contrôle continu n°1, février 2014

*Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. **(Sur 23 points)** Soit $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de variables aléatoires définie par:

$$Y_i = \theta_0 + \sum_{k=1}^{p} \theta_k \, Z_i^{(k)} + \varepsilon_i \qquad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, \qquad \text{où:} \tag{1}$$

$\theta = {}^t(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_p)$ est un vecteur composé de $p+1$ réels inconnus, pour $1 \leq j \leq p$, les $(Z_i^{(j)})_{1\leq i\leq n}$ sont $p$ familles de réels connues et la matrice $X = (Z_i^{(j)})_{1\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq p}$, avec par définition $Z_i^{(0)} = 1$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. On suppose que $X$ est de rang $p+1 \leq n$. La suite $(\varepsilon_i)_i$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi centrée et de variance $\sigma^2 > 0$. On note $H = (H_{ij})_{ij} = X\left({}^tX\,X\right)^{-1}{}^tX$.

(a) On note $Y = (Y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. Ecrire le modèle (1) sous une forme vectorielle.

(b) Rappeler l'expression de l'estimateur $\widehat{\theta}$ de $\theta$ par moindres carrés ordinaires en fonction de $X$ et $Y$.

(c) On note $\widehat{Y} = X\,\widehat{\theta}$, $\widehat{\varepsilon} = (\widehat{\varepsilon}_i)_{1\leq i\leq n} = Y - \widehat{Y}$ et $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^n \widehat{\varepsilon}_i^2$. Ecrire $\widehat{\varepsilon}$ en fonction de $H$ et de $\varepsilon$. En déduire $\mathbb{E}(\widehat{\varepsilon})$ et $\mathrm{cov}(\widehat{\varepsilon})$ en fonction de $H$ et de $\sigma^2$.

(d) Soit le vecteur colonne $J_i$ tel que $J_i = {}^t(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le 1 se situant en $i$ème position. Calculer ${}^tJ_i\widehat{\varepsilon}$. Ecrire $\mathrm{var}(\widehat{\varepsilon}_i)$ en fonction de $J_i$, $H$ et $\sigma^2$. En déduire que $\mathrm{var}(\widehat{\varepsilon}_i) = (1 - H_{ii})\sigma^2$ (on pourra utiliser la trace).

(e) Lorsque $\varepsilon$ est de loi gaussienne, quelle est la loi de $\widehat{W}_i = \frac{\widehat{\varepsilon}_i^2}{(1-H_{ii})\widehat{\sigma}^2}$ (justifier...)? Si $\max_{1\leq i\leq n}|H_{ii}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $\varepsilon$ est de loi quelconque, quelle est la loi limite de $\widehat{W}_i$?

(f) Si $p = 1$ et $Z_i^{(1)} = \alpha^i$ pour $1 \leq i \leq n$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$, calculer $\widehat{\theta}$ et $H$. A-t-on $\max_{1\leq i\leq n}|H_{ii}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$?

*Proof.* (a) On a $Y = X\,\theta + \varepsilon$ avec $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ **(0.5pts)** et $\varepsilon$ est un vecteur centré et de matrice de covariance $\sigma^2\,I_n$, où $I_n$ est la matrice identité **(0.5 pts)**.

(b) On a $\widehat{\theta} = ({}^tX\,X)^{-1}\,{}^tX$ **(0.5 pts)**.

(c) On a $\widehat{\varepsilon} = P_{[X]^\perp}\,\varepsilon$, donc $\widehat{\varepsilon} = (I_n - H)\,\varepsilon$ **(1 pt)**.
On a donc $\mathbb{E}(\widehat{\varepsilon}) = 0$ et $\mathrm{cov}(\widehat{\varepsilon}) = \sigma^2\,(I - H)$ **(1 pt)**.

(d) On a ${}^tJ_i\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}_i$ **(0.5 pts)**.
On ainsi $\mathrm{var}(\widehat{\varepsilon}_i) = \mathbb{E}\left({}^tJ_i\widehat{\varepsilon}\,{}^t\widehat{\varepsilon}J_i\right) = \sigma^2\,{}^tJ_i(I_n - H)J_i = \sigma^2(1 - H_{ii})$ **(1.5 pts)**.

(e) Il est clair que $\frac{\widehat{\varepsilon}_i^2}{(1-H_{ii})\sigma^2}$ suit une loi du $\chi^2$ à un degré de liberté. De plus, $\widehat{\sigma}^2/\sigma^2$ suit une loi $(n-(p+1))^{-1}\chi^2(n-(p+1))$. Cependant ces 2 lois ne sont pas indépendantes et on ne peut donc pas dire que $\widehat{W}_i$ suit une loi de Fisher $\Big(1, (n-(p+1))\Big)$ **(2 pts)**.
On sait que $\widehat{\sigma}^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \sigma^2$. De plus, sous l'hypothèse $\max_{1\leq i\leq n}|H_{ii}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ on sait que $\widehat{\theta}$ est asymptotiquement gaussien et de même pour $\widehat{Y}$, donc $\widehat{Y}_i$. Cependant $Y_i$ n'est pas forcément gaussien donc on ne peut rien conclure en général **(1.5 pts)**. Si $\varepsilon$ est gaussien, en revanche, $\widehat{W}_i \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} (p+1)^{-1}\chi^2(1)$ **(1 pt)**.

(f) Lorsque $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$, il est clair que $X$ n'est pas de rang 2. On ne considèrera pas ces 2 cas **(1 pt)**.
En dehors de ces 2 cas et du cas $\alpha = -1$, on a ${}^tXX = \frac{1}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix} (1-\alpha^2)n & \alpha(1+\alpha)(1-\alpha^n) \\ \alpha(1+\alpha)(1-\alpha^n) & \alpha^2(1-\alpha^{2n}) \end{pmatrix}$, soit

$$({}^tXX)^{-1} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}\,\frac{1}{(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2}\begin{pmatrix} \alpha^2(1-\alpha^{2n}) & -\alpha(1+\alpha)(1-\alpha^n) \\ -\alpha(1+\alpha)(1-\alpha^n) & (1-\alpha^2)n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\|({}^tXX)^{-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quand $|\alpha| > 1$ donc $\widehat{H}$ converge dans $\mathbb{L}^2$ mais $\|({}^tXX)^{-1}\|$ ne tend pas vers 0 donc $\widehat{H}$ ne converge pas dans $\mathbb{L}^2$ quand $|\alpha| < 1$.
On a également:

$$({}^tXX)^{-1}\,{}^tX = \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}\,\frac{1}{(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \alpha^2(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha^2 & \alpha^2(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha^3 & \cdots & \alpha^2(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha^{n+1} \\ n(1-\alpha^2)\alpha - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha & n(1-\alpha^2)\alpha^2 - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha & \cdots & n(1-\alpha^2)\alpha^n - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\widehat{\theta} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}\,\frac{1}{(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2}\begin{pmatrix} \alpha^2 \sum_{i=1}^n \Big((1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha^{i-1}\Big)Y_i \\ \sum_{i=1}^n \Big(n(1-\alpha^2)\alpha^i - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha\Big)Y_i \end{pmatrix} \textbf{ (4 pts)}.$$

De la même manière,

$$H = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2}\Big((1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\alpha^{j-1} + \Big(n(1-\alpha^2)\alpha^{j-1} - (1+\alpha)(1-\alpha^n)\Big)\alpha^{i-1}\Big)_{1\le i,j\le n} \quad \textbf{(2 pts)}$$

Enfin, si $|\alpha|>1$, $(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2 \sim (\alpha-1)n\alpha^{2n}$ et $\max_{1\le i\le n}|H_{ii}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha^2-1)/\alpha^2$ **(2 pts)**.
On en déduit que si $|\alpha|<1$, $(1-\alpha)n(1-\alpha^{2n}) - (1+\alpha)(1-\alpha^n)^2 \sim (1-\alpha)n$ et $\max_{1\le i\le n}|H_{ii}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\alpha^2)$.

Dans les 2 cas, on n'a donc pas de normalité asymptotique pour $\widehat{\theta}_n$ **(2 pts)**.
Pour terminer, lorsque $\alpha=-1$, on montre facilement la convergence dans $\mathbb{L}^2$ et également la normalité asymptotique puisque $\max_{1\le i\le n}|H_{ii}| \sim 2/N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **(2 pts)**.

□

2. **(Sur 15 points)** On note $\widehat{\theta}^{(-i)}$ l'estimateur de $\theta$ lorsque l'on n'utilise pas $Y_i$ et on note $\widehat{Y}^{(-i)} = (\widehat{Y}_j^{(-i)})_{1\le j\le n} = X\,\widehat{\theta}^{(-i)}$ avec $X^{(-i)}$ la matrice $X$ dans laquelle on a remplacé la $i$ème ligne par des 0. On note également la matrice $X^{(i)} = X - X^{(-i)}$, et $[X]$ (respectivement, $[X^{(-i)}]$ et $[X^{(i)}]$) le sev de $\mathbf{R}^n$ engendré par $X$, soit $\{X\theta,\ \theta \in \mathbf{R}^{p+1}\}$ (respectivement engendré par $X^{(-i)}$ et par $X^{(i)}$). Dans $\mathbf{R}^n$, on considère le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ tel que pour $U, V \in \mathbf{R}^n$, $<U,V> = {}^tUV$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée. On appelle distance de Cook pour la $i$ème observation, la statistique
$$\widehat{D}_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\widehat{Y}_j - \widehat{Y}_j^{(-i)})^2}{(p+1)\widehat{\sigma}^2}.$$

(a) Exprimer $\widehat{\theta}^{(-i)}$ en fonction de $X^{(-i)}$ et $Y$. Montrer que $[X^{(i)}]$ et $[X^{(-i)}]$ sont orthogonaux.

(b) Montrer que $((p+1)\widehat{\sigma}^2)\widehat{D}_i = {}^t(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)})^tXX(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)})$.

(c) Soit $A$ une matrice carrée de taille $p+1$, inversible et soit $U$ et $V$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^{p+1}$. On suppose que $A + U^tV$ est inversible. Montrer que ${}^tUV$ et ${}^tUA^{-1}V$ sont des réels. Vérifier que
$$(A+U^tV)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}U^tVA^{-1}}{1+{}^tUA^{-1}V}.$$

(d) En supposant que $1 - {}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i > 0$, en déduire que $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1} = ({}^tXX)^{-1} + \dfrac{({}^tXX)^{-1}X_i{}^tX_i({}^tXX)^{-1}}{1-{}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i}$, avec $X_i$ le vecteur de $\mathbf{R}^{p+1}$ constitué de la $i$ème ligne de $X$. En déduire que $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1}X_i = \dfrac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}$.

(e) Montrer que ${}^tXX^{(i)} = {}^tX^{(i)}X^{(i)}$. En déduire que $\big({}^tX^{(-i)}X^{(-i)}\big)(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)}) = {}^tX^{(i)}(Y - X^{(i)}\widehat{\theta})$.

(f) Déduire de tout ceci que
$$\widehat{D}_i = \frac{H_{ii}}{(p+1)(1-H_{ii})}\,\frac{\widehat{\varepsilon}_i^2}{(1-H_{ii})\widehat{\sigma}^2}.$$
Lorsque les $(\varepsilon_i)$ sont gaussiens, quelle est la loi de $\widehat{D}_i$?

*Proof.* (a) On a $\widehat{\theta}^{(-i)} = ({}^tX^{(i)}X^{(i)})^{-1}{}^tX^{(i)}Y$ **(0.5 pts)**.
Il est clair que si $U \in [X^{(-i)}]$, donc $U$ a des coordonnées non forcément nulle partout sauf la $i$ème qui est nulle et $V \in [X^{(i)}]$ donc $V$ vaut partout 0 sauf sur sa $i$ème coordonnées alors $<U,V> = 0$ **(0.5 pts)**.

(b) $((p+1)\widehat{\sigma}^2)\widehat{D}_i = \|X(\widehat{\theta}^{(-i)} - \widehat{\theta})\|^2 = {}^t(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)})^tXX(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)})$ **(0.5 pts)**.

(c) Il est clair que ${}^tUV$ et ${}^tUA^{-1}V$ sont des réels (produit matriciel $(1,n)\times(n,1)$) **(0.5 pts)**.
Par ailleurs,
$$\begin{aligned}(A+U^tV)\Big(A^{-1} - \frac{A^{-1}U^tVA^{-1}}{1+{}^tUA^{-1}V}\Big) &= I_{p+1} + U^tVA^{-1} + \frac{-U^tVA^{-1} - U^tVA^{-1}U^tVA^{-1}}{1+{}^tUA^{-1}V} \\ &= I_{p+1} + U^tVA^{-1}\Big(1 - \frac{1+{}^tVA^{-1}U}{1+{}^tUA^{-1}V}\Big) \\ &= I_{p+1} + U^tVA^{-1}(1-1) = I_{p+1},\end{aligned}$$
car ${}^tVA^{-1}U = {}^tUA^{-1}V$ puisque c'est un réel **(3 pts)**.

(d) On choisit $A = {}^tXX$, $U = X_i$ et $V = -X_i$. Alors ${}^tX\,X - X_i{}^tX_i = {}^tX^{(-i)}X^{(-i)}$. Donc d'après l'égalité précédente, $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1} = ({}^tX\,X)^{-1} + \frac{({}^tXX)^{-1}X_i{}^tX_i({}^tXX)^{-1}}{1-{}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i}$ **(1.5 pts)**.
On a donc $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1}X_i = ({}^tX\,X)^{-1}X_i + \frac{({}^tXX)^{-1}X_i{}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i}{1-{}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i}$. Mais ${}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i$ est un réel qui n'est pas autre chose que $H_{ii}$. Donc $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1}X_i = ({}^tX\,X)^{-1}X_i + \frac{H_{ii}\,({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}} = \frac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}$ **(1.5 pts)**.

(e) ${}^tXX^{(i)} = {}^t(X^{(-i)} + X^{(i)})X^{(i)} = {}^tX^{(i)}X^{(i)}$ car $X^{(-i)}$ et $X^{(i)}$ sont "'orthogonaux"' **(0.5 pts)**.
On a $\big({}^tX^{(-i)}X^{(-i)}\big)(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)}) = {}^tX^{(-i)}X^{(-i)}({}^tX\,X)^{-1}{}^tXY - {}^tX^{(-i)}Y = {}^tX^{(-i)}(X - X^{(i)})({}^tX\,X)^{-1}{}^tXY - {}^t(X - X^{(i)})Y$.
Donc $\big({}^tX^{(-i)}X^{(-i)}\big)(\widehat{\theta} - \widehat{\theta}^{(-i)}) = {}^tX^{(-i)}X\widehat{\theta} + {}^tX^{(i)}Y - {}^tXY = {}^tX^{(i)}Y + {}^t(X - X^{(i)})X\widehat{\theta} - {}^tXY = {}^tX^{(i)}Y - {}^tX^{(i)}X\widehat{\theta}$. Comme ${}^tXX^{(i)} = {}^tX^{(i)}X^{(i)}$, on en déduit le résultat **(2.5 pts)**.

(f) De ce qui précède, on a $((p+1)\widehat{\sigma}^2)\widehat{D}_i = {}^t(\widehat{\theta}-\widehat{\theta}^{(-i)})\,{}^tXX(\widehat{\theta}-\widehat{\theta}^{(-i)})$. En remplaçant $(\widehat{\theta}-\widehat{\theta}^{(-i)})$ par $\left({}^tX^{(-i)}X^{(-i)}\right)^{-1}{}^tX^{(i)}(Y - X^{(i)}\widehat{\theta})$, puis avec $({}^tX^{(-i)}X^{(-i)})^{-1}X_i = \dfrac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}$, on obtient que $\widehat{\theta}-\widehat{\theta}^{(-i)} = \frac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}(Y - X^{(i)}\widehat{\theta})$. Par suite,

$$\begin{aligned}
((p+1)\widehat{\sigma}^2)\widehat{D}_i &= {}^t\Big(\frac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}(Y - X^{(i)}\widehat{\theta})\Big)\,{}^tXX\Big(\frac{({}^tXX)^{-1}X_i}{1-H_{ii}}(Y - X^{(i)}\widehat{\theta}\Big) \\
&= \frac{1}{(1-H_{ii})^2}\,{}^t(Y - X^{(i)}\widehat{\theta})\,{}^tX_i({}^tXX)^{-1}X_i(Y - X^{(i)}\widehat{\theta}) \\
&= \frac{H_{ii}}{(1-H_{ii})^2}(Y_i - X^{(i)}\widehat{\theta})^2 \qquad \textbf{(3 pts)}.
\end{aligned}$$

Comme dans la partie précédente, quand $n \to \infty$ et lorsque $\varepsilon$ est gaussien, alors $(p+1)\frac{(1-H_{ii})}{H_{ii}}\widehat{D}_i \sim \chi^2(1)$ **(1 pt)**.

□