Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2015 − 2016

Econométrie II

Contrôle continu n°1, mars 2016

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

(Sur 24+2 points) On observe la température mensuelle T dans une ville pendant n années. On disposera donc des données $(T_k)_{1\leq k\leq 12n}$. On suppose que sur ces n années la température peut être modélisée par:

$$T_k = \theta_0 + \theta_1 \cos\big(k\,\frac{\pi}{6}\big) + \theta_2 \sin\big(k\,\frac{\pi}{6}\big) + \varepsilon_i \qquad \text{pour tout } k\in\{1,\dots,12\,n\}, \qquad \text{où:} \tag{1}$$

$\theta = {}^t(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ est un vecteur composé de 3 réels inconnus, $(\varepsilon_i)_i$ est une suite non observée de v.a.i.i.d. de loi centrée et de variance $\sigma^2_\varepsilon > 0$. On appellera respectivement X_1 et X_2 les variables constituées des $\cos(k\,\frac{\pi}{6})$ et des $\sin(k\,\frac{\pi}{6})$.

1. Montrer que pour $P\in\mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^P \cos(2\pi\,k/P) = \sum_{k=1}^P \sin(2\pi\,k/P) = 0$, puis que $\sum_{k=1}^P \cos^2(2\pi\,k/P) = P/2$ et $\sum_{k=1}^P \cos(2\pi\,k/P)\sin(2\pi\,k/P) = 0$ **(2 pts)**.

2. On note $\widehat\theta = {}^t\big(\widehat\theta_0,\widehat\theta_1,\widehat\theta_2\big)$ l'estimateur de θ par moindres carrés. Donner l'expression des $\widehat\theta_i-\theta_i$ en fonction des ε_k (montrer notamment que $\widehat\theta_1-\theta_1 = \frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{12n}\cos\big(k\,\frac{\pi}{6}\big)\varepsilon_k)$ **(3 pts)**. En déduire, en fonction de $\widehat\theta$, la valeur prédite pour la température d'un mois de mars **(1 pt)**.

3. Démontrer que $\sqrt{n}(\widehat\theta-\theta)$ tend en loi vers une limite que l'on précisera lorsque $n\to\infty$ **(3 pts)**.

4. Ecrire l'estimateur $\widehat\sigma^2$ par moindres carrés et non biaisé de σ^2. Quel est son comportement asymptotique quand $n\to\infty$? **(1 pt)**

5. On veut tester que le signal est bien périodique dans le sens où les variables X_1 et/ou X_2 sont bien significatives. Après avoir posé les hypothèses du test, montrer que la statistique de test de Fisher associée à ce test s'écrit $\widehat F = \frac{3\,n}{\widehat\sigma^2}\big(\widehat\theta_1^2+\widehat\theta_2^2\big)$ **(3 pts)**. On suppose que n est grand et que l'on a obtenu pour valeur de ce test 19.036. Que conclure? **(2 pts)**

6. On veut tester que la variable X_2 est bien significative. Ecrire explicitement en fonction des $\widehat\theta_i$ et $\widehat\sigma^2$ la statistique de test de Student relative à un tel test **(2 pts)**. On suppose que n est grand et que l'on a obtenu pour valeur de ce test -1.347. Que conclure? **(1 pt)**

7. On suppose que $\theta_0=4$, $\theta_1=-10$ et $\theta_2=-5$. On effectue une régression par moindres carrés sans la variable X_2 et on note $\widehat\sigma_2^2$ la variance estimée par un tel modèle. Montrer alors que $\widehat\sigma_2^2 = \frac{1}{12n-2}\Big(6\,n\,\theta_2^2 + \|P_A\,\varepsilon\|^2 + 2\,\theta_2\,{}^tX_2\,P_A\,\varepsilon\Big)$, en notant $\varepsilon=(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq 12n}$ et $X_2=\big(\sin\big(k\,\frac{\pi}{6}\big)\big)_{1\leq k\leq 12n}$ et P_A la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel A que l'on précisera **(3 pts)**. En déduire que $\widehat\sigma_2^2 \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \sigma^2+\frac12\,\theta_2^2$ **(3 pts)**.

8. **(Question subsidiaire)** Utiliser le résultat précédent pour montrer que la probabilité que le critère BIC choisisse un modèle avec X_1 et X_2 plutôt qu'un modèle avec uniquement X_1 tend vers 1 quand $n\to\infty$ **(2 pts)**.