Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2010 – 2011

Statistiques II

Contrôle continu n°1, mars 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 13 points + 4 points facultatifs)** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ un processus stationnaire centré tel que var$X_0 = \sigma^2 < \infty$. On suppose que X est M-dépendant, où $M \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que pour tout t tel que $t \geq M+1$, alors $(X_{-k})_{k\in\mathbf{N}}$ est indépendant de $(X_{t+k})_{k\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbf{Z}$ tels que $|s-t| \geq M+1$ alors X_s est indépendant de X_t **(1pt)**.
   (b) On note $r(k) = \mathbb{E}X_0X_k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que $|r(k)| \leq \sigma^2$ pour tout $k \in \mathbf{Z}^2$ **(1pt)**. Que peut-on dire de $r(k)$ si $|k| > M$ **(0.5pts)**?
   (c) Soit $\overline{X}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$. Montrer que $N\,\mathrm{var}(\overline{X}_N) \to \gamma^2$ quand $N \to \infty$ avec $\gamma^2 = \sigma^2 + 2\sum_{k=1}^M r(k) < \infty$ **(2.5pts)** et en déduire que $\overline{X}_N \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} 0$ **(1pt)**.
   (d) Soit $n \geq 2M+1$ tel que $N = r\,n$ où $r \in \mathbf{N}^*$. On considère $Z_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-M} X_{(i-1)n+k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Montrer que les variables aléatoires Z_i sont des v.a.i.i.d. **(1pt)**. Montrer que pour tout $n \geq 2M$, il existe $\gamma_n^2 < \infty$ que l'on précisera tel que $\sqrt{r\,n}\overline{Z}_r \underset{N\to+\infty}{\overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,\gamma_n^2)$ où $\overline{Z}_r = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r Z_i$ **(2.5pts)**.
   (e) Montrer que $\gamma_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma^2$ **(0.5pt)**.
   (f) Soit $U_i^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M-1} X_{in-k}$ pour $i = 1, \cdots, r$. Montrer que les variables aléatoires $U_i^{(n)}$ sont des v.a.i.i.d. **(0.5pts)**. Montrer que $N\mathrm{var}(\overline{U}_r^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, où $\overline{U}_r^{(n)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r U_i^{(n)}$ **(2pts)**.
   (g) **(Question facultative: 4pts)** Déduire de (d), (e) et (f) que
   $$\sqrt{N}\,\overline{X}_N \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,\gamma^2). \tag{1}$$
   (h) Adapter le théorème (1) au cas où $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est un processus stationnaire M-dépendant tel que $\mathbb{E}X_0 = m$ et var$X_0 = \sigma^2 < \infty$ **(0.5pts)**.

2. **(Sur 14 points)** On considère une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires gaussiennes indépendantes identiquement distribuées centrées et de variance commune $\sigma^2 > 0$. Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ tel que
   $$X_i = a + \varepsilon_{i-1}\,\varepsilon_i \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}^*.$$
   (a) Déterminer la tendance et la saisonalité de X **(1pt)**.
   (b) Montrer que X est un processus stationnaire **(2pts)**.
   (c) Montrer que X est un processus d'ordre 2 **(0.5pts)**. Le processus X est-il gaussien **(0.5pts)**?
   (d) Déterminer l'autocovariance de X **(1pt)**. En déduire l'expression de la densité spectrale de X après avoir montré qu'elle existe **(1pt)**. Le processus $(X-a)$ est-il un bruit blanc faible **(0.5pts)**? Un bruit blanc fort **(1.5pts)**?
   (e) On suppose que l'on observe une trajectoire $(X_1, \cdots, X_N)$ avec $N \in \mathbf{N}^*$ mais que a, σ^2 et les $(\varepsilon_i)_{0\leq iN}$ sont inconnus. On veut estimer a et σ^2. On définit:
   $$\overline{X}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i, \quad \text{et} \quad \widehat{s}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2.$$
   En utilisant 1.(h), montrer des thèorèmes centraux limite vérifiés par $\overline{X}_N$, par $(\overline{X}_N)^2$ et par $\widehat{s}_N$ **(4pts)**.
   (f) Déduire de ceci des estimateurs convergents de a et σ^2 et préciser leurs vitesses de convergence **(2pts)**.