Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2011 – 2012

Statistiques II

Contrôle continu n°1, mars 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 15 points + 7 points facultatifs)** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ le processus défini par:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}\,\varepsilon_{t-i} \qquad \text{pour} \qquad t \in \mathbf{Z},$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2.

(a) Soit $N \in \mathbf{N}$ et soit $(X_t^{(N)})_{t\in Z}$ le processus tel que pour $t \in \mathbf{Z}$, $X_t^{(N)} = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i+1}\,\varepsilon_{t-i}$. Montrer que $(X_t^{(N)})_{t\in Z}$ est un processus stationnaire.

(b) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{Z}$, la suite $(X_t^{(N)})_N$ converge absolument dans $\mathbb{L}^2$. En déduire que (X_t) existe dans $\mathbb{L}^2$ et est un processus stationnaire gaussien.

(c) Déterminer $\mathbb{E}X_t$ et $\mathrm{var}(X_t)$ (on rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). En déduire la loi de X_t pour $t \in \mathbf{Z}$.

(d) Calculer (sous forme de série) l'autocovariance r_X de (X_t). Le processus (X_t) est-il un bruit blanc?

(e) On utilisant la décomposition $\frac{1}{i(i+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{k+i}\right)$, montrer que $r_X(k) \simeq \sigma^2 \,\frac{\ln k}{k}$ pour $k \to \infty$.

(f) En déduire que la densité spectrale f_X de (X_t) existe sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, mais $\lim_{x\to 0} f_X(x) = \infty$.

(g) **(Question facultative = 7 points)** Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$\mathrm{var}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{var}(X_0) + \dfrac{2}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)r_X(k)$, puis que $\mathrm{var}(\overline{X}_n) \simeq \sigma^2 \dfrac{\log^2 n}{n}$ pour $n \to \infty$.

En déduire que $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ puis que $\dfrac{\sqrt{n}}{\log n}\,\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \sigma^2\big)$.

2. **(Sur 9 points)** On suppose maintenant que l'on observe $(Y_1, \cdots, Y_{3n})$ issu du processus $Y = (Y_t)_{t\in\mathbf{N}}$ tel que

$$Y_t = a\,g(t) + X_t \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{N}.$$

où $a \in \mathbf{R}^*$ est inconnu, et $g(3i) = 1$, $g(3i+1) = 3$ et $g(3i+2) = -1$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

(a) Le processus $(Y_t)_{t\in\mathbf{N}}$ est-il stationnaire? Gaussien?

(b) Déterminer la tendance, la saisonalité de Y et sa période.

(c) On désire estimer a et σ^2. A l'aide d'une estimation par moindres carrés ordinaires, montrer que

$$\widehat{a}_n = \frac{1}{11\,n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(3Y_{3i+1} - Y_{3i+2} + Y_{3i+3}\big).$$

En déduire un estimateur non biaisé de σ^2.

(d) Montrer que $\widehat{a}_n$ est un estimateur sans biais. Montrer que si deux suites de variables alétoires $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont telles que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} 0$ et $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} 0$, alors $U_n + V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} 0$. En déduire que $\widehat{a}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^2} a$ (on utilisera les mêmes raisonnements qu'en 1.(g) sans faire de calculs).

(e) En déduire un estimateur convergeant de la tendance et de la saisonnalité de Y.