*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

**Première Année Master M.A.E.F.** 2012 – 2013

# Statistiques II

Contrôle continu n°1, mars 2013

*Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.*

1. **(Sur 16 points)** Soit $\sigma^2 > 0$ et soit $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ le processus gaussien centré tel que

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_s, \varepsilon_t) = \sigma^2 \, \frac{1}{1+|t^2-s^2|} \qquad \text{pour} \quad s,t \in \mathbf{Z}.$$

   (a) Déterminer la loi de $\varepsilon_t$ pour $t \in \mathbf{Z}$. Les variables aléatoires $(\varepsilon_t)$ sont-elles identiquement distribuées? Sont-elles indépendantes?

   (b) Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ n'est pas un processus stationnaire. Déterminer la tendance et la composante saisonnière de $(\varepsilon_t)$.

   (c) Soit $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite bornée de réels. Montrer que

$$\mathrm{var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i\Big) = \frac{\sigma^2}{n}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} \frac{a_i a_j}{j^2-i^2+1}\Big).$$

   Déterminer la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$.

   (d) Soit $(Z_n)$ une suite de variables aléatoires telles que pour $n \in \mathbf{N}$, $Z_n \sim \mathcal{N}(m_n, \gamma_n^2)$. On suppose que $m_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$ et $\gamma_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma^2 > 0$. Montrer que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m\,,\,\gamma^2)$.

   (e) Montrer que

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{j^2-i^2+1} \le \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{j-i} - \frac{1}{j+i}\Big) \le \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{2i} \frac{1}{k}.$$

   On suppose en plus que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^2$ avec $A^2 > 0$. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0\,,\,\sigma^2 A^2)$.

2. **(Sur 12 points)** On suppose maintenant que l'on observe $(X_1, \cdots, X_{12n})$ issu du processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{N}}$ tel que

$$X_t = \theta_0 + \theta_1 \cos\big(\frac{\pi}{6}\,t\big) + \theta_2 \cos\big(\frac{\pi}{3}\,t\big) + \varepsilon_t \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{Z}.$$

   où $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ sont inconnus.

   (a) **(Préliminaires)** Montrer que $\sum_{k=1}^{12n} \cos(\frac{\pi}{6}\,k) = 0$, $\sum_{k=1}^{12n} \cos^2(\frac{\pi}{6}\,k) = 6n$ et $\sum_{k=1}^{12n} \cos(\frac{\pi}{6}\,k)\cos(\frac{\pi}{3}\,k) = 0$.

   (b) Le processus $(X_t)_{t\in\mathbf{N}}$ est-il stationnaire? Gaussien?

   (c) Déterminer la tendance, la saisonalité de $X$ et sa période.

   (d) On désire estimer $\theta_0, \theta_1$ et $\theta_2$. A l'aide d'une estimation par moindres carrés ordinaires, montrer que

$$\widehat{\theta}_0^{(n)} = \frac{1}{12\,n} \sum_{k=1}^{12n} X_k, \qquad \widehat{\theta}_1^{(n)} = \frac{1}{6\,n} \sum_{k=1}^{12n} \cos(\frac{\pi}{6}k) X_k \qquad \text{et} \qquad \theta_2^{(n)} = \frac{1}{6\,n} \sum_{k=1}^{12n} \cos(\frac{\pi}{3}k) X_k.$$

   (e) Déterminer le biais de $(\widehat{\theta}_0^{(n)}, \widehat{\theta}_1^{(n)}, \widehat{\theta}_2^{(n)})$ et écrire chacun de ces estimateurs en fonction de $(\varepsilon_t)_t$.

   (f) En utilisant les résultats du 1.(e), déterminer des théorèmes de la limite centrale vérifiés par $(\widehat{\theta}_0^{(n)}, \widehat{\theta}_1^{(n)}, \widehat{\theta}_2^{(n)})$.