Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2013 – 2014

Statistiques II

Contrôle continu n°1, février 2014

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 9 points)** On suppose que $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,\theta]$ avec $\theta>0$ un réel inconnu. On définit la suite $(X_t)_{t\in\mathbf{N}}$ par $X_0=0$ et la relation suivante:
$$X_{t+1}=\max\big(X_t\,,\,\varepsilon_{t+1}\big)\qquad \text{pour tout } t\in\mathbf{N}.$$
   (a) Montrer que pour tout $t\in\mathbf{N}^*$, $X_t=\max\big(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t\big)$.
   (b) Pour $t\in\mathbf{N}^*$, montrer que la densité de probabilité de X_t par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ vaut: $f_t(x)=t\,x^{t-1}\,\theta^{-t}\mathbb{I}_{t\in[0,\theta]}$.
   (c) Déterminer la tendance et la saisonnalité de (X_t). La série (X_t) est-elle stationnaire?
   (d) Montrer que les variables X_t ne sont pas indépendantes.
   (e) Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} \theta$.
   (f) Soit $Z_n=n(\theta-X_n)$. Déterminer la densité de probabilité de Z_n. En déduire que $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1/\theta)$ où $\mathcal{E}(1/\theta)$ est une loi exponentielle de paramètre $1/\theta$.

2. **(Sur 22 points)** Soit $\sigma^2>0$ un réel inconnu et soit $\varepsilon=(\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2. Pour tout $t\in\mathbf{N}$, on définit X_t par
$$X_t=2X_{t-1}-X_{t-2}+\varepsilon_t,$$
et par hypothèse $X_{-1}=b$ et $X_{-2}=a$, où a et b sont des réels inconnus.
   (a) On pose $U_t=X_t-X_{t-1}$ pour $t\in\mathbf{N}$. Montrer que pour tout $t\in\mathbf{N}$, $U_t=(b-a)+\sum_{i=0}^t\varepsilon_i$.
   (b) En déduire que pour $t\in\mathbf{N}$, $X_t=b+(t+1)(b-a)+\sum_{i=0}^t(t-i+1)\varepsilon_i$. Quelle est la tendance, la saisonnalité et le bruit de $(X_t)_{t\in\mathbf{N}}$? Déterminer la variance et la loi de X_t pour $t\in\mathbf{N}$. $(X_t)_{t\in\mathbf{N}}$ est-elle stationnaire?
   (c) On suppose observée une trajectoire $(X_0,\cdots,X_n)$ et on considère la trajectoire $(U_1,\cdots,U_n)$ obtenue à partir de $(X_0,\cdots,X_n)$. Montrer que pour $i\le j$, $\mathrm{cov}(U_i,U_j)=(i+1)\,\sigma^2$. En déduire la loi du vecteur $\mathbf{U}_n={}^t(U_1,\cdots,U_n)$ (on notera J_n la matrice de covariance de $\mathbf{U}_n$ que l'on explicitera).
   (d) On note $\theta=b-a$. Montrer que $\overline{U}_n=\frac1n\,(U_1+\cdots+U_n)$ est un estimateur sans biais de θ. Quelle est la loi de $\overline{U}_n$? Est-ce un estimateur convergent de θ?
   (e) Vérifier que $J_n^{-1}=\dfrac{1}{\sigma^2}\Sigma_n^{-1}$ avec $\Sigma_n^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-1&0&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&2&-1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}$. Montrer que l'estimateur $\widehat{\theta}_n$ par maximum de vraisemblance de θ vérifie $\widehat{\theta}_n=({}^t\mathbf{1}_n\Sigma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\,{}^t\mathbf{1}_n\Sigma_n^{-1}\mathbf{U}_n$ avec $\mathbf{1}_n={}^t(1,\cdots,1)$. Que vaut $\widehat{\theta}_n$? Quelle est sa loi? Est-ce un estimateur convergent de θ? Comparer son risque quadratique avec celui de $\overline{U}_n$ et conclure.
   (f) Montrer par récurrence que le déterminant de J_n est égal à $2\,\sigma^{2n}$. Utiliser ce qui précède pour montrer que l'estimateur par maximum de vraisemblance $\widehat{\sigma}^2_n$ de σ^2 est tel que $\widehat{\sigma}^2_n=\dfrac1n\,{}^t\big(\mathbf{U}_n-U_1\mathbf{1}_n\big)\Sigma_n^{-1}\big(\mathbf{U}_n-U_1\mathbf{1}_n\big)$