Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2010 − 2011

Statistiques II

Contrôle continu n°2, avril 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 15 points)** On considère une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (vaiid) centrées et de variance commune σ^2 et de moment d'ordre 4, $\mu_4 = \mathbb{E}\varepsilon_0^4 < \infty$. On définit pour tout $i \in \mathbf{Z}$ la suite $(X_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ telle qu'avec $a \in]-1,1[$:
$$X_{i+2} = a\, X_i + \varepsilon_{i+2} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z}.$$
   (a) Rappeler, en justifiant, quel processus est $(X_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ **(0.5pts)**. Est-il stationnaire **(0.5pts)**? Causal **(0.5pts)**?
   (b) Déterminer l'expression de X_i en fonction de $(\varepsilon_{i-k})_{k\in\mathbf{N}}$ **(1pt)**.
   (c) Déterminer l'expression (sans nombre complexe) de la densité spectrale de (X_i) **(1pt)**.
   (d) Montrer que $r(k)$, l'autocovariance de $(X_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ vérifie $r(2n) = \mu a^n$ et $r(2n+1) = 0$ pour $n \in \mathbf{N}$, où μ est un réel que l'on pourra exprimer en fonction de σ^2 et a **(2.5pts)**.
   (e) On suppose que $(X_1, \cdots, X_N)$ est observé, avec N "grand", les ε_i, a et σ^2 étant inconnus. On désire estimer a et σ^2. On définit $\widehat{a}_N = \text{Argmin}_{\{\alpha,\, 0\leq\alpha<1\}} Q_N(\alpha)$ où $Q_N(\alpha) = \frac{1}{N-2}\sum_{k=3}^N (X_k - \alpha\, X_{k-2})^2$. Montrer que $\widehat{a}_N$ est unique et déterminer son expression exacte en fonction de $(X_1, \cdots, X_N)$ **(2pts)**.
   (f) Montrer que $Q_N(a)$ vérifie une loi forte des grands nombres et un théorème central limite **(1pt)**.
   (g) Plus généralement, on peut montrer (ne pas le faire) que pour tout $|\alpha| < 1$, $Q_N(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Q(\alpha)$ avec $Q(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}Q_N(\alpha)$. Calculer $Q(\alpha)$ **(1pt)**et montrer pour tout $\alpha \neq a$, $Q(\alpha) > Q(a)$ **(1pt)**. En déduire que $\widehat{\alpha}_N \xrightarrow[N\to+\infty]{p.s.} a$ **(3pts)**.
   (h) Montrer alors que $\widehat{\sigma}_N^2 = Q_N(\widehat{a}_N)$ est un estimateur convergeant presque sûrement vers σ^2 **(1pt)**.

2. **(Sur 14 points)** Soit une chaîne de Markov $X = (X_t)_{t\in\mathbf{N}}$ homogène prenant les valeurs 1 ou -1 et telle que $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1 \mid X_0 = -1) = q$ où p et q sont des réels de $[0,1]$. On suppose également que X_0 suit une loi quelconque inconnue.
   (a) Déterminer la matrice de transition de X **(0.5pts)**. A quelles conditions sur p et q cette chaîne est-elle irréductible **(0.5pts)**? On se placera désormais sous ces conditions.
   (b) Déterminer la mesure invariante μ de X **(1pt)**. On suppose désormais que X_0 suit la loi μ.
   (c) Montrer que $\mathbb{E}X_n = \dfrac{p-q}{2-p-q}$ **(0.5pts)** et calculer $\text{var}X_n$ pour $n \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**.
   (d) Montrer que $\text{cov}(X_0, X_1) = 4\dfrac{(1-q)(1-p)(p+q-1)}{(2-p-q)^2}$ **(3pts)**. A quelle condition sur p et q X est-il un bruit blanc **(1pt)**?
   (e) On considère le processus $Y = (Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ modélisant par exemple défini par $Y_n = a\, X_n + b + \varepsilon_n$ pour $n \in \mathbf{N}$, où ε_i est un bruit blanc fort gaussien indépendant de (X_n) et a, b deux réels inconnus. Déterminer la tendance, la saisonnalité et la partie bruit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de Y **(0.5pts)**. Ce bruit est-il stationnaire **(1pt)**? Un bruit blanc **(1pt)**?
   (f) On suppose que l'on observe $(X_1, \cdots, X_N)$ et $(Y_1, \cdots, Y_N)$ et l'on désire estimer a et b par régression linéaire. Donner l'expression d'un estimateur $(\widehat{a}_N, \widehat{b}_N)$ de (a,b) (on pourra utiliser les notations $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i$, $\overline{Y}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N Y_i$, $\overline{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_i^2 - \overline{X}_N^2$ et $\overline{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N X_iY_i - \overline{X}_N\overline{Y}_N$) **(2pts)**. Montrer que cet estimateur converge **(2.5pts)**.