Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Master M.A.E.F., 2011 - 2012
Statistiques II

Controôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30

L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez à tout instant appliquer le résultat d'une question précédante même si celle-ci n'a pas été traitée.

Exercice 1(Sur 21 points)

1-) Soient $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus centré et stationnaire du second ordre de densité spectrale f_Y et de fonction d'autocovariance r_Y et $\Psi = \{\psi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ une famille absolument sommable (i.e. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$). On définit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par $X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j Y_{t-j}$. X est bien défini presque sûrement.

(a) Calculer $E\, X_t$. Montrer que pout tout $t, h \in \mathbb{Z}$, $E\,(X_{t+h}X_t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_k r_Y(h + k - j)$. Déduire que X est stationnaire d'ordre 2. Dans la suite on notera r_X sa fonction d'autocovariance.

(b) Monter que la densité spectrale de X est $f_X(\lambda) = |\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\lambda}|^2 f_Y(\lambda)$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

2-) Soient $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre et Φ, Θ deux polynômes tels que Φ ne s'annule pas sur le cercle unité. On définit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par la relation $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Y_t$.

(a) Justifier que X est stationnaire d'ordre 2.

(b) Exprimer la densité spectrale de X en fonction de celle de Y.

(c) Déduire la densité spectrale d'un ARMA(p,q).

(d) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus centré, stationnaire et de variance finie. Montrer que si la densité spectrale de X est constante, alors X est un bruit blanc (faible).

3-) Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2. On considère un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ où $\Phi(B) = 1 - \phi B$ et $\Theta(B) = 1 + \theta B$ avec $|\phi| > 1$ et $|\theta| > 1$. On considère les polynômes $\widetilde{\Phi}(B) = 1 - \frac{1}{\phi}B$ et $\widetilde{\Theta}(B) = 1 + \frac{1}{\theta}B$ et le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant $\widetilde{\Theta}(B)Z_t = \widetilde{\Phi}(B)X_t$.

(a) Reconnaitre le processus X. Est-il stationnaire? Causal? Inversible?

(b) Déterminer la densité spectrale de X.

(c) Montrer (après calcul) que la densité spectrale de Z est constante. Déduire que Z est un bruit blanc (faible) et expliciter sa variance.

(d) Conclure que X est un ARMA(1,1) causal et inversible par rapport au bruit Z.

Exercice 2 (Sur 10 points)

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien centré réduit; on note Φ la fonction de répartition de cette loi. On définit le processus $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$Y_n = \varepsilon_n \text{ si } Y_{n-1} \leq 0 \text{ et } Y_n = \delta + \varepsilon_n \text{ si } Y_{n-1} > 0$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ et le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_n = 1 \text{ si } Y_n \leq 0 \text{ et } X_n = 2 \text{ si } Y_n > 0.$$

1. Montrer que X est une chaîne de Markov. Déterminer sa matrice de transition (on pourra exprimer les probabilités de transition en fonction de Φ). Déduire que X est homogène.
2. Montrer que X est irréductible.
3. Déduire que X admet une unique loi stationnaire et la déterminer.