*Université Paris I, Panthéon - Sorbonne*

# Master M.A.E.F., 2011 - 2012
# Statistiques II

Controôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30

*L'objectif ici n'est pas de tout traiter mais, d'en couvrir une part significative de manière convaincante. Les réponses devront être soigneusement argumentées et justifiées. Vous pouvez à tout instant appliquer le résultat d'une question précédante même si celle-ci n'a pas été traitée.*

**Exercice 1(Sur 21 points)**

1-) Soient $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus centré et stationnaire du second ordre de densité spectrale $f_Y$ et de fonction d'autocovariance $r_Y$ et $\Psi = \{\psi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ une famille absolument sommable (i.e. $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$). On définit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par $X_t = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j Y_{t-j}$. $X$ est bien défini presque sûrement.

(a) Calculer $E\,X_t$. Montrer que pout tout $t, h \in \mathbb{Z}$, $E\,(X_{t+h}X_t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_k r_Y(h+k-j)$. Déduire que $X$ est stationnaire d'ordre 2. Dans la suite on notera $r_X$ sa fonction d'autocovariance.

(b) Monter que la densité spectrale de $X$ est $f_X(\lambda) = |\sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j e^{-ij\lambda}|^2 f_Y(\lambda)$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

2-) Soient $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre et $\Phi$, $\Theta$ deux polynômes tels que $\Phi$ ne s'annule pas sur le cercle unité. On définit le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par la relation $\Phi(B)X_t = \Theta(B)Y_t$.

(a) Justifier que $X$ est stationnaire d'ordre 2.

(b) Exprimer la densité spectrale de $X$ en fonction de celle de $Y$.

(c) Déduire la densité spectrale d'un ARMA(p,q).

(d) Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus centré, stationnaire et de variance finie. Montrer que si la densité spectrale de $X$ est constante, alors $X$ est un bruit blanc (faible).

3-) Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2$. On considère un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant $\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$ où $\Phi(B) = 1 - \phi B$ et $\Theta(B) = 1 + \theta B$ avec $|\phi| > 1$ et $|\theta| > 1$. On considère les polynômes $\widetilde{\Phi}(B) = 1 - \frac{1}{\phi}B$ et $\widetilde{\Theta}(B) = 1 + \frac{1}{\theta}B$ et le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant $\widetilde{\Theta}(B)Z_t = \widetilde{\Phi}(B)X_t$.

(a) Reconnaitre le processus $X$. Est-il stationnaire? Causal? Inversible?

(b) Déterminer la densité spectrale de $X$.

(c) Montrer (après calcul) que la densité spectrale de $Z$ est constante. Déduire que $Z$ est un bruit blanc (faible) et expliciter sa variance.

(d) Conclure que $X$ est un ARMA(1,1) causal et inversible par rapport au bruit $Z$.

**Exercice 2 (Sur 10 points)**

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien centré réduit; on note $\Phi$ la fonction de répartition de cette loi. On définit le processus $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$Y_n = \varepsilon_n \ \text{ si } \ Y_{n-1} \le 0 \ \text{ et } \ Y_n = \delta + \varepsilon_n \ \text{ si } \ Y_{n-1} > 0$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ et le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_n = 1 \ \text{ si } \ Y_n \le 0 \ \text{ et } \ X_n = 2 \ \text{ si } \ Y_n > 0.$$

1. Montrer que $X$ est une chaîne de Markov. Déterminer sa matrice de transition (on pourra exprimer les probabilités de transition en fonction de $\Phi$). Déduire que $X$ est homogène.
2. Montrer que $X$ est irréductible.
3. Déduire que $X$ admet une unique loi stationnaire et la déterminer.

# Correction

## Exercice 1

1-)

(a) Comme $Y$ est centré et que $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\psi_j|<\infty$, on a facilement $E\,X_t=0$ **(0.5pt)**. Pour tout $n>0$, on a

$$|(\sum_{j=-n}^{n}\psi_j Y_{t+h-j})(\sum_{j=-n}^{n}\psi_j Y_{t-j})| = |\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\psi_j\psi_k Y_{t+h-j}Y_{t-k}| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_j|\,|\psi_k|\,|Y_{t+h-j}|\,|Y_{t-k}|.$$

$$\text{Or, } E\Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_j|\,|\psi_k|\,|Y_{t+h-j}|\,|Y_{t-k}|\Big] \le \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi_j|\,|\psi_k|\,E\,|Y_{t+h-j}|\,E\,|Y_{t-k}| \le E\,|Y_0|^2(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\psi_j|)^2<\infty.$$

Par, le théorème de la convergence dominée, on a

$$E\,(X_{t+h}X_t)=\lim_{n\to\infty}E\Big((\sum_{j=-n}^{n}\psi_j Y_{t+h-j})(\sum_{j=-n}^{n}\psi_j Y_{t-j})\Big)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\psi_j\psi_k E\,(Y_{t+h-j}Y_{t-k})$$
$$=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k r_Y(h+k-j)\quad \textbf{(2.5pts)}\ .$$

Comme $E\,X_t$ est constante et $E\,(X_{t+h}X_t)$ ne dépend que de $h$, on déduit que $X$ est stationnaire d'ordre 2. et a pour fonction d'autocovariance $r_X(h)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k r_Y(h+k-j)$ **(1pt)**.

(b) Pour $\lambda\in[-\pi,\pi]$, on a $f_X(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}r_X(h)e^{-ih\lambda}=\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k r_Y(h+k-j)e^{-ih\lambda}$ . En posant $\ell=h+k-j$ i.e., $h=\ell+j-k$ on a

$$f_X(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k r_Y(\ell)e^{-i(\ell+j-k)\lambda}=\big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j e^{-ij\lambda}\big)\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k e^{ik\lambda}\big)\big(\frac{1}{2\pi}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}r_Y(\ell)e^{-i\ell\lambda}\big)=\big|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j e^{-ij\lambda}\big|^2 f_Y(\lambda)$$

car $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k e^{ik\lambda}=\overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k e^{-ik\lambda}}$ (où $\overline{z}$ est le conjugué du nombre complexe $z$) **(3.5pts)**.

2-)

(a) Comme le polyôme $\Phi$ ne s'annule pas sur le cercle unité, il est inversible et on peut s'écrire sous la forme $\Phi(B)^{-1}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_jB^j$ avec $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|a_j|<\infty$. Ainsi, on peut écrire $\Phi(B)^{-1}\Theta(B)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_jB^j$ avec $\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\psi_j|<\infty$. On aura donc $X_t=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_jY_{t-j}$. Comme $Y$ est stationnaire du second ordre, on déduit de la question 1-) (a) que $X$ l'est également **(2pts)**.

(b) D'après la question 1-) (b), on a $f_X(\lambda)=|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_je^{-ij\lambda}|^2f_Y(\lambda)$ pour tout $\lambda\in[-\pi,\pi]$. Mais par definition des $(\psi_j)$ (voir question (a)), on a $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_je^{-ij\lambda}=\Phi(e^{-i\lambda})^{-1}\Theta(e^{-i\lambda})=\frac{\Theta(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}$. D'où $f_X(\lambda)=\big|\frac{\Theta(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}\big|^2f_Y(\lambda)$ **(2pts)**.

(c) Un ARMA(p,q) s'obtient lorsque Y est un bruit blanc. Anisi, si $Y$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2$, $f_Y(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}$ et donc $f_X(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\big|\frac{\Theta(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}\big|^2$ pour tout $\lambda\in[-\pi,\pi]$ **(1.5pts)**.

(d) Soit $r_X$ (rep. $f_X$) la fonction d'autocovariance (la densité spectrale de $X$). Il suffit de montrer que $r_X(h)=0$ pour $h\neq0$. Supponsons que $f_X(\lambda)=c$ pour tout $\lambda\in[-\pi,\pi]$. On a pour $h\neq0$, $r_X(h)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ih\lambda}f_X(\lambda)d\lambda=c\int_{-\pi}^{\pi}e^{ih\lambda}d\lambda=0$ **(1.5pts)**.

3-)

(a) $X$ est un ARMA(1,1) stationnaire qui n'est ni causal, ni inversible, car les plynômes $\Phi$ et $\Theta$ admettent des racines dans le disque unité **(1.5pts)**.

(b) D'après la question 2-) (c), on a $f_X(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\big|\frac{\Theta(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}\big|^2=\frac{\sigma^2}{2\pi}\big|\frac{1+\theta e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}}\big|^2$ **(1pt)**.

(c) En utilisant le résultat trouvé à la question 2-) (b), on a

$$f_Z(\lambda) = \left|\frac{\widetilde{\Phi}(e^{-i\lambda})}{\widetilde{\Theta}(e^{-i\lambda})}\right|^2 f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{1-\frac{1}{\phi}e^{-i\lambda}}{1+\frac{1}{\theta}e^{-i\lambda}}\right|^2\left|\frac{1+\theta e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\theta^2}{\phi^2}\left|\frac{\phi-e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}}\right|^2\left|\frac{1+\theta e^{-i\lambda}}{\theta+e^{-i\lambda}}\right|^2.$$

En utilisant le fait qu'un nombre complexe a le même module que son conjugé, on a $\left|\frac{\phi-e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}}\right| = \left|\frac{(1-\phi e^{i\lambda})e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}}\right| = 1$. De même, on a $\left|\frac{1+\theta e^{-i\lambda}}{\theta+e^{-i\lambda}}\right| = 1$. D'où $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\theta^2}{\phi^2}$ **(1.5pts)**. Comme $(\varepsilon_t)$ est centré, $X$ et $Z$ le sont. De la même manière, $Z$ est stationnaire de variance $\sigma_Z^2 = r_Z(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f_Z(\lambda)d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\theta^2}{\phi^2}d\lambda = \frac{\theta^2}{\phi^2}\sigma^2$ **(1pt)**. On déduit donc de la question 2-) (d) que $Z$ est un bruit blanc faible **(0.5pt)**.

(d) On a $\widetilde{\Phi}(B)X_t = \widetilde{\Theta}(B)Z_t$. Comme les racines des polynômes $\widetilde{\Phi}$ et $\widetilde{\Theta}$ sont à l'extérieur du disque unité, on conclure que $X$ est un ARMA(1,1) causal et inversible par rapport au bruit $Z$ **(1pt)**.

**Exercice 2**

1. On peut encore écrire $Y_{n+1} = \varepsilon_{n+1}\mathbb{1}_{Y_n<0} + (\delta+\varepsilon_{n+1})\mathbb{1}_{Y_n>0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquons aussi que $Y_0, \cdots, Y_n$ sont indépendantes de $\varepsilon_{n+1}$. Soit donc $x_{n+1}, x_n, \cdots, x_0 \in \{1,2\}$. On a $\{X_{n+1} = x_{n+1}\} \in \sigma(\varepsilon_{n+1}, \mathbb{1}_{Y_n\le 0}, \mathbb{1}_{Y_n>0}) = \sigma(\varepsilon_{n+1}, X_n)$. Ainsi, $P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$. D'où $X$ est une chaîne de Markov à 2 états **(3.5pts)**.
De plus, on a $P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = P(Y_{n+1} \le 0|Y_n \le 0) = P(\varepsilon_{n+1} \le 0|Y_n \le 0) = P(\varepsilon_{n+1} \le 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Donc, $P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. De même, $P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = P(Y_{n+1} \le 0|Y_n > 0) = P(\varepsilon_{n+1} \le 0|Y_n > 0) = P(\delta + \varepsilon_{n+1} \le 0) = P(\varepsilon_{n+1} \le -\delta) = \Phi(-\delta)$ et $P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) = 1 - P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = 1 - \Phi(-\delta)$. La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \Phi(-\delta) & 1-\Phi(-\delta) \end{pmatrix}$ **(2.5pts)**. Comme $P$ ne dépend pas de $n$, on conclut que $X$ est une chaîne de Markov homogène **(1pt)**.

2. Toutes les probabilités de transition sont strictement positives. Donc, $X$ est irréductible **(1.5pts)**.

3. $X$ est irréductible et à espace d'état fini, donc elle admet une unique loi stationnaire $\mu = (\mu_1, \mu_2)$.
$\begin{cases} \mu P = \mu \\ \mu_1 + \mu_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mu_1 + 2\mu_2\Phi(-\delta) = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mu_1 = \frac{2\Phi(-\delta)}{1+2\Phi(-\delta)}$ et $\mu_2 = \frac{1}{1+2\Phi(-\delta)}$ **(1.5pts)**.