Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2012 – 2013

Statistiques II

Contrôle continu n°2, avril 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 14 points)** Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ un bruit blanc fort centré de variance $\sigma_\varepsilon^2 > 0$, inconnue. On définit, lorsque cela est possible, le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ tel que

$$X_t - 2a\,X_{t-1} + a^2 X_{t-2} = \varepsilon_t \qquad \text{pour} \quad t \in \mathbf{Z}.$$

avec $a \in \mathbf{R}$.

(a) Dire suivant les valeurs de a quel type de processus est X. On suppose désormais que $|a| < 1$.

(b) Pour $t \in \mathbf{Z}$, déterminer l'expression de X_t en fonction de $(\varepsilon_{t-n})_{n\in\mathbf{N}}$ et de a.

(c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x(1-x)^{-2}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k = x(1+x)(1-x)^{-3}$ (on pourra s'aider du développement en série entière de $(1-x)^{-1}$).

(d) En dEn déduire que $r_X(j) = \sigma_\varepsilon^2 a^{|j|}\Big(\frac{(1+a^2)+(1-a^2)|j|}{(1-a^2)^3}\Big)$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ où r_X est l'autocovariance de X. Quelle est la limite de $r_X(j)$ quand $|j| \to \infty$?

(e) On observe finalement $(Y_1, \cdots, Y_n)$ où pour $t \in \mathbf{Z}$, $Y_t = \alpha + X_t + \xi_t$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$ inconnu et $\xi = (\xi_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ un bruit blanc fort centré de variance σ_ξ^2, indépendant de ε. Montrer que $Y = (Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est stationnaire. Déterminer la densité spectrale de Y.

(f) **(Facultatif: 4 points)** Montrer que cette densité spectrale est celle d'un processus ARMA dont on précisera l'ordre.

(g) On définit $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$. Montrer que $\overline{Y}_n$ est un estimateur non biaisé de α. Montrer que $\overline{Y}_n$ vérifie un théorème de la limite centrale que l'on précisera.

2. **(Sur 8 points)** Voici des simulations effectuées avec le logiciel R.

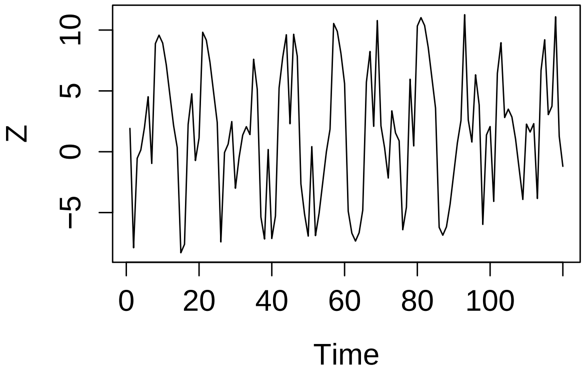
(a) On tape d'accord les commandes suivantes:

```
X=runif(120)
Y=1
p=0.4
for (i in c(1:119))
{Y[i+1]=Y[i]*(X[i]>p)-Y[i]*(X[i]<p)}
Y
Z=2+0.02*c(1:120)-5*sin(pi*c(1:120)/6)+4*(Y-0.5)
ts.plot(Z)
```

Voici les premières valeurs de Y obtenues:

```
> Y
  [1]  1 -1  1  1  1  1 -1  1  1  1  1  1  1  1 -1 -1  1  1 -1 -1  1  1
 [23]  1  1  1 -1  1  1  1 -1 -1 -1 -1 -1  1  1 -1 -1  1 -1 -1  1  1  1
 [45] -1  1  1 -1 -1 -1  1 -1 -1 -1 -1 -1  1  1  1  1 -1 -1 -1 -1 -1  1
```

On obtient également le graphe suivant:



Questions: Quel est le processus simulé par le vecteur Y (préciser tous ses paramètres)? Expliquer pourquoi ensuite on considère $Y - 0.5$? Enfin, quelle sont les tendances et saisonnalités de Z?

(b) Voici les commandes tapées ensuite:

```
Z1=c(1:120)
Z2=sin(pi*c(1:120)/6)
reg=lm(Z~Z1+Z2)
summary(reg)
```

Voici les résultats obtenus:

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.755147   0.732735   2.395   0.0182 *
Z1          -0.001297   0.010518  -0.123   0.9021
Z2          -5.243756   0.515256 -10.177   <2e-16 ***

Residual standard error: 3.98 on 117 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4706,Adjusted R-squared: 0.4615
F-statistic:    52 on 2 and 117 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Questions: Qu'a-t-on fait par ces commandes? Que représentent les valeurs 1.755147, -0.001297 *et* -5.243756*? Pourquoi s'attendait-on approximativement à ces valeurs?*

(c) On tape enfin les commandes suivantes:

```
X=runif(100)
epsilon=2*(X<0.5)-1
Y=0
for (i in c(1:99))
{Y[i+1]=epsilon[i]*sqrt(0.5+0.6*Y[i]^2)}
```

Voici les premières valeurs de Y obtenues:

```
> Y
   [1]  0.0000000  0.7071068  0.8944272 -0.9899495  1.0430724 -1.0736852
   [7]  1.0916410  1.1022740 -1.1086049 -1.1123861  1.1146487 -1.1160040
  [13] -1.1168165  1.1173036  1.1175958  1.1177711  1.1178763 -1.1179394
  [19]  1.1179772  1.1179999  1.1180136 -1.1180217  1.1180266 -1.1180296
  [25]  1.1180313  1.1180324  1.1180330 -1.1180334 -1.1180336 -1.1180338
  [31] -1.1180339 -1.1180339 -1.1180339 -1.1180340  1.1180340  1.1180340
  [37]  1.1180340  1.1180340 -1.1180340  1.1180340  1.1180340 -1.1180340
```

Questions: Expliquez ce qui a été effectué avec ces commandes (en particulier, quelle est la loi de epsilon, quel processus est Y?). Retrouvez par le calcul la valeur exacte correspondant à 1.1180340.