Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2010 – 2011

Statistiques II

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(9 points)** Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2=\sigma^2<1$. On considère le processus $(X_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ défini par:
$$X_{n+1}=\varepsilon_{n+1}(X_n+1)\quad \text{pour } n\in\mathbf{Z}. \tag{1}$$
   (a) Pour $k\in\mathbf{N}^*$, déterminer l'expression de X_n en fonction de X_{n-k} et de $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{Z}}$. Après avoir montré l'existence de son expression dans $\mathbb{L}^2$, montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tel que $X_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$ pour $n\in\mathbf{Z}$ est une solution de (1) (on pourra poser $X_n^{(m)}=\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$ pour $m\in\mathbf{N}$).
   (b) Montrer que X est un processus stationnaire d'ordre 2 après avoir précisé sa moyenne et son autocovariance.
   (c) En déduire que X admet une densité spectrale que l'on précisera.
   (d) Montrer que X n'est pas un bruit blanc fort (on pourra calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}^2\,|\,X_n)$).
   (e) Montrer que quelque soit la loi de ε_0, X ne peut pas être un processus gaussien.
   (f) On suppose que $(X_1,\cdots,X_n)$ est connu. Quelle prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ feriez-vous?

2. **(18 points)** Soit le processus $X=(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que
$$X_k=a+b\,\alpha^k+\varepsilon_k\quad\text{pour}\quad k\in\mathbf{N},$$
avec a et b deux réels inconnus, α un réel connu tel que $|\alpha|\le 1$ et un bruit blanc fort gaussien $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2=\sigma^2>0$. On suppose que $(X_0,X_1,\cdots,X_n)$ est connu mais pas $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et on voudrait estimer a et b.
   (a) Déterminer l'espérance de X et sa covariance. A quelle condition sur α, X est-il un processus stationnaire? Pour quelle(s) valeur(s) de α, X admet-il une saisonnalité?
   (b) On suppose ici que $\alpha=1$. Montrer qu'un estimateur convergent de a est aussi un estimateur convergent de b. En déduire que l'on ne peut pas estimer en général a et b.
   (c) On suppose que $\alpha=-1$. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n={}^t(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)$ convergent de $\theta={}^t(a,b)$ (on supposera que n est impair). Montrer que l'estimateur proposé est sans biais, converge presque sûrement et vérifie un théorème de la limite centrale que l'on précisera.
   (d) On suppose que $|\alpha|<1$.
      i. Soit $Y=(Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ tel que $Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\varepsilon_{t-i}$ pour $t\in\mathbf{Z}$. Montrer que Y est un processus ARMA dont on précisera l'ordre, l'autocorrélation et la densité spectrale.
      ii. Montrer que $\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=0}^{n}\alpha^i\varepsilon_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ pour tout $\beta>0$.
      iii. Déterminer l'expression matricielle de l'estimateur $(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)$ par moindres carrés de (a,b). En déduire que l'estimateur $(\widetilde{a}_n,\widetilde{b}_n)$ tel que $\displaystyle\widetilde{a}_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}X_i$ et $\displaystyle\widetilde{b}_n=(1-\alpha^2)\sum_{i=0}^{n}\alpha^iX_i-\frac{(\alpha+1)}{n+1}\sum_{i=0}^{n}X_i$, vérifie $(\widehat{a}_n-\widetilde{a}_n,\widehat{b}_n-\widetilde{b}_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

iv. Montrer que $\widetilde{a}_n$ converge presque sûrement vers a et vérifie un théorème de la limite centrale.

v. Montrer que $\widetilde{b}_n$ est un estimateur asymptotiquement non biaisé mais qui ne converge pas vers b en probabilité.

3. **(8 points)** Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \sigma^2$ et soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. On considère le processus $(X_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ défini par:
$$X_n = \varepsilon_n - 2\alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\varepsilon_{n-2} \quad \text{pour } n \in \mathbf{Z}.$$

   (a) Quel type de processus est X? Est-il stationnaire? Causal?

   (b) Déterminer l'autocovariance $r(\cdot)$ de X et sa densité spectrale.

   (c) On suppose que $(X_1, \cdots, X_n)$ est connu. Rappeler la définition de l'autocovariance empirique $\widehat{r}_n(\cdot)$ de X et le théorème central limite multidimensionnel vérifié par $(\widehat{r}_n(k))_{0\leq k\leq K}$ pour $K \in \mathbf{N}$ (on exprimera la covariance asymptotique sous forme d'intégrales). En déduire un estimateur convergent de α et de σ^2 (parmi plusieurs possibilités) et sa vitesse de convergence (en puissance de n).

   (d) Lorsque α tel que $|\alpha| < 1$ est connu, on désire calculer un prédicteur $\widehat{X}_{n+1}$ connaissant $(X_{n-k})_{k\in\mathbf{N}}$. Que proposeriez vous? Et si α est inconnu?