Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2010 − 2011

Statistiques II

Examen final, mai 2011

Examen de 3h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(9 points)** Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \sigma^2 < 1$. On considère le processus $(X_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ défini par:

$$X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(X_n + 1) \quad \text{pour } n \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

   (a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer l'expression de X_n en fonction de X_{n-k} et de $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{Z}}$. Après avoir montré l'existence de son expression dans $\mathbb{L}^2$, montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tel que $X_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ est une solution de (1) (on pourra poser $X_n^{(m)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$ pour $m \in \mathbf{N}$).

   (b) Montrer que X est un processus stationnaire d'ordre 2 après avoir précisé sa moyenne et son autocovariance.

   (c) En déduire que X admet une densité spectrale que l'on précisera.

   (d) Montrer que X n'est pas un bruit blanc fort (on pourra calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \,|\, X_n)$).

   (e) Montrer que quelque soit la loi de ε_0, X ne peut pas être un processus gaussien.

   (f) On suppose que $(X_1, \cdots, X_n)$ est connu. Quelle prédiction $\widehat{X}_{n+1}$ feriez-vous?

Proof. (a) On a facilement par itération $X_n = \sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=0}^{i}\varepsilon_{n-j} + X_{n-k}\prod_{j=0}^{k-1}\varepsilon_{n-j}$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ (**1 pt**).
Posons $X_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{m}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$. Il est clair que $\mathbb{E}(X_n^{(m)})^2 = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}\mathbb{E}\Big(\prod_{k=0}^{i}\prod_{\ell=0}^{j}\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{n-j}\Big) = \sum_{i=0}^{m}\sigma^{2i+2} = \sigma^2(1-\sigma^{2m+2})(1-\sigma^2)^{-1}$ donc $X_n^{(m)}$ existe dans L^2 pour tout $m \in \mathbf{N}$. De plus, $\mathbb{E}(X_n^{(m)} - X_n)^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty}\sigma^{2i} = \sigma^{2m+2}(1-\sigma^2)^{-1} \to 0$ quand $m \to \infty$ car $\sigma^2 < 1$. Donc $(X_n^{(m)})_m$ converge dans $\mathbb{L}^2$ vers X_n. Enfin, $\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1}X_n = \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+1}\sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k} = \sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n+1-k} = X_{n+1}$ donc $X_n = \sum_{i=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{i}\varepsilon_{n-k}$ est bien solution de (1) (**3 pts**).
(b) On a aisément $\mathbb{E}X_n = 0$ et $\mathbb{E}X_nX_{n+k} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}\Big(\prod_{\ell=0}^{i}\prod_{m=0}^{j}\varepsilon_{n-\ell}\varepsilon_{n=k-m}\Big) = 0$ si $k \neq 0$ et $\mathrm{var}X_n = \sigma^2(1-\sigma^2)^{-1}$. Donc les variables (X_n) sont non corrélées et ont même espérance et même variance: c'est un processus stationnaire d'ordre 2 (**2 pts**).
(c) On a facilement $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2(1-\sigma^2)^{-1}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$ (**0.5 pts**).
(d) On a $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 \,|\, X_n) = \sigma^2(1+X_n)^2 \neq \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \sigma^2(1-\sigma^2)^{-1}$ du fait de l'indépendance de X_n et ε_{n+1}: les (X_k) ne sont pas indépendantes (**1 pt**).
(e) Les X_i sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes: X n'est pas un processus gaussien (**0.5 pts**).
(f) La prédiction optimale par moindres carrés est $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1} \;|\, (X1, \cdots, X_n)) = (1+X_n)\mathbb{E}\varepsilon_{n+1} = 0$ (**1 pt**).

□

2. **(18 points)** Soit le processus $X = (X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que

$$X_k = a + b\,\alpha^k + \varepsilon_k \quad \text{pour} \quad k \in \mathbf{N},$$

avec a et b deux réels inconnus, α un réel connu tel que $|\alpha| \leq 1$ et un bruit blanc fort gaussien $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \sigma^2 > 0$. On suppose que $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ est connu mais pas $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et on voudrait estimer a et b.

   (a) Déterminer l'espérance de X et sa covariance. A quelle condition sur α, X est-il un processus stationnaire? Pour quelle(s) valeur(s) de α, X admet-il une saisonnalité?

   (b) On suppose ici que $\alpha = 1$. Montrer qu'un estimateur convergent de a est aussi un estimateur convergent de b. En déduire que l'on ne peut pas estimer en général a et b.

(c) On suppose que $\alpha=-1$. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n={}^t(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)$ convergent de $\theta={}^t(a,b)$ (on supposera que n est impair). Montrer que l'estimateur proposé est sans biais, converge presque sûrement et vérifie un théorème de la limite centrale que l'on précisera.

(d) On suppose que $|\alpha|<1$.

i. Soit $Y=(Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ tel que $Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\varepsilon_{t-i}$ pour $t\in\mathbf{Z}$. Montrer que Y est un processus ARMA dont on précisera l'ordre, l'autocorrélation et la densité spectrale.

ii. Montrer que $\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=0}^n\alpha^i\varepsilon_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$ pour tout $\beta>0$.

iii. Déterminer l'expression matricielle de l'estimateur $(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)$ par moindres carrés de (a,b). En déduire que l'estimateur $(\widetilde{a}_n,\widetilde{b}_n)$ tel que $\widetilde{a}_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^n X_i$ et $\widetilde{b}_n=(1-\alpha^2)\displaystyle\sum_{i=0}^n\alpha^iX_i-\dfrac{(\alpha+1)}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^n X_i$, vérifie $(\widehat{a}_n-\widetilde{a}_n,\widehat{b}_n-\widetilde{b}_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} 0$.

iv. Montrer que $\widetilde{a}_n$ converge presque sûrement vers a et vérifie un théorème de la limite centrale.

v. Montrer que $\widetilde{b}_n$ est un estimateur asymptotiquement non biaisé mais qui ne converge pas vers b en probabilité.

Proof. (a) $\mathbb{E}X_k=a+b\alpha^k$ et $\operatorname{cov}(X_k,X_\ell)=0$ si $k\neq\ell$, $=\sigma^2$ si $k=\ell$ (**0.5 pts**). X est stationnaire si et seulement si $\alpha\in\{0,1\}$ ou si $b=0$ (**0.5 pts**). X admet une saisonnalité si et seulement si $\alpha=-1$ et $b\neq0$ (**0.5 pts**).
(b) La loi est X est symétrique en a et b: un estimateur convergent de a est donc un estimateur convergent de b (**0.5 pts**). A moins que $a=b$, il n'est pas possible d'estimer a et b. En fait on peut estimer plutôt $a+b$ (**0.5 pts**).
(c) $\mathbb{E}X_k=a+(-1)^kb+\varepsilon_k$ admet pour saisonnalité de période 2: $s(k)=(-1)^k$. On peut utiliser alors un estimateur par moindres carrés pour estimer a et b. Si Z est une matrice $(n+1,2)$ ayant pour vecteur colonne $(1)_k$ et $((-1)^k)_k$, alors lorsque n est impair $({}^tZZ)^{-1}=\frac{1}{n+1}I_2$, d'où $\widehat{\theta}_n={}^t(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)={}^t\big(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^nX_i,\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n(-1)^iX_i\big)=\theta+{}^t\big(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\varepsilon_i,\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n(-1)^i\varepsilon_i\big)$ (**1 pt**). Il est donc clair que c'est un estimateur sans biais et comme $((-1)^i\varepsilon_i)_i$ a la même loi que $(\varepsilon_i)_i$ (car la loi gaussienne est symétrique) on peut appliquer la loi forte des grands nombres et $\widehat{\theta}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}\theta$. On peut aussi appliquer le TLC et $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta)\xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{P}}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (**1.5 pts**).
(d) i. Y est un AR(1) stationnaire causal vérifiant $Y_n=\alpha Y_{n-1}+\varepsilon_n$ pour tout $n\in\mathbf{Z}$ (**1 pt**). Son autocorrélation est $r(k)=\alpha^k$ (**0.5 pts**) et sa densité spectrale est $f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\sigma^2(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\lambda))^{-1}$ pour $\lambda\in[-\pi,\pi]$ (**0.5 pts**).
ii. On a $\sum_{i=0}^n\alpha^i\varepsilon_i$ qui converge dans $\mathbb{L}^2$ donc en probabilité lorsque $n\to\infty$ vers la variable Y_0, gaussienne et de variance $r(0)$. Donc il est clair que $\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=0}^n\alpha^i\varepsilon_i\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}}0$ pour tout $\beta>0$ (**1.5 pts**).
iii. On peut utiliser l'estimateur par moindres carrés ordinaire pour estimer a et b avec Z_n la matrice de taille $(n+1,2)$ ayant pour vecteur colonne $(1)_k$ et $(\alpha^k)_k$, on obtient ${}^tZZ=\begin{pmatrix}n+1 & (1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1}\\ (1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1} & (1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1}\end{pmatrix}$. On en déduit que $({}^tZZ)^{-1}=\begin{pmatrix}(1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1} & -(1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1}\\ -(1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1} & n+1\end{pmatrix}\big((n+1)(1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1}-(1-\alpha^{n+1})^2(1-\alpha)^{-2}\big)^{-1}$. En conséquence

$$\begin{aligned}&{}^t(\widehat{a}_n,\widehat{b}_n)=({}^tZZ)^{-1}\,{}^tZX=\big((n+1)(1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1}-(1-\alpha^{n+1})^2(1-\alpha)^{-2}\big)^{-1}\\ &\times{}^t\Big((1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1}\sum_{i=0}^nX_i-(1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1}\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i\ ,\ (n+1)\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i-(1-\alpha^{n+1})(1-\alpha)^{-1}\sum_{i=0}^nX_i\Big)\quad\textbf{(2 pts)}.\end{aligned}$$

Asymptotiquement, comme $|\alpha|<1$, $\big((n+1)(1-\alpha^{2n+2})(1-\alpha^2)^{-1}-(1-\alpha^{n+1})^2(1-\alpha)^{-2}\big)^{-1}\sim\frac{1}{n+1}(1-\alpha^2)$. Il ainsi clair que presque sûrement

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_n&\sim\frac{1}{n+1}(1-\alpha^2)\begin{pmatrix}(1-\alpha^2)^{-1}\sum_{i=0}^nX_i-(1-\alpha)^{-1}\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i\\ (n+1)\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i-(1-\alpha)^{-1}\sum_{i=0}^nX_i\end{pmatrix}\\ &\sim\begin{pmatrix}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^nX_i-\frac{\alpha+1}{n+1}\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i\\ (1-\alpha^2)\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i-\frac{\alpha+1}{n+1}\sum_{i=0}^nX_i\end{pmatrix}\quad\textbf{(2 pts)}.\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\alpha_iX_i\xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{P}}0$, on a donc bien $(\widehat{a}_n-\widetilde{a}_n,\widehat{b}_n-\widetilde{b}_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}}0$ (**0.5 pts**).
iv. On peut encore écrire que $\widetilde{a}_n=a+\frac{b}{n+1}\sum_{i=0}^n\alpha^i+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\varepsilon_i$. Il est clair d'après la LFGN que $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\varepsilon_i\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}0$, que $\frac{b}{n+1}\sum_{i=0}^n\alpha^i\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\widetilde{a}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.}a$ (**1 pt**). De même, grâce à cette décomposition, d'après le TLC classique $\sqrt{n}(\widetilde{a}_n-a)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (**1 pt**).
v. On peut encore écrire que

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_n&=\Big(a(1+\alpha)(1-\alpha^{n+1})+b(1-\alpha^{2n+2})+(1-\alpha^2)\sum_{i=0}^n\alpha^i\varepsilon_i\Big)-(1+\alpha)\Big(a+\frac{b(1-\alpha^{n+1})}{(n+1)(1-\alpha)}+\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\varepsilon_i\Big)\\ &=-a(1+\alpha)\alpha^{n+1}+b\Big(1-\alpha^{2n+2}-\frac{(1+\alpha)(1-\alpha^{n+1})}{(n+1)(1-\alpha)}\Big)+(1-\alpha^2)\sum_{i=0}^n\alpha^i\varepsilon_i-\frac{1+\alpha}{n+1}\sum_{i=0}^n\varepsilon_i.\end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $\mathbb{E}\widetilde{b}_n = -a(1+\alpha)\alpha^{n+1} + b\Big(1 - \alpha^{2n+2} - \frac{(1+\alpha)(1-\alpha^{n+1})}{(n+1)(1-\alpha)}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$: l'estimateur $\widetilde{b}_n$ est asymptotiquement non biaisé (**1.5 pts**).

Cependant, si $\frac{1+\alpha}{n+1}\sum_{i=0}^n \varepsilon_i \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{p.s.}} 0$ on a $(1-\alpha^2)\sum_{i=0}^n \alpha^i \varepsilon_i \underset{N\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{P}}} (1-\alpha^2)Y_0$, qui n'est pas la loi nulle, donc il n'y a pas convergence en probabilité de $\widetilde{b}_n$ vers b (**1.5 pts**).

□

3. **(8 points)** Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ tel que $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = \sigma^2$ et soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. On considère le processus $(X_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ défini par:

$$X_n = \varepsilon_n - 2\alpha\varepsilon_{n-1} + \alpha^2\varepsilon_{n-2} \quad \text{pour } n \in \mathbf{Z}.$$

   (a) Quel type de processus est X? Est-il stationnaire? Causal?

   (b) Déterminer l'autocovariance $r(\cdot)$ de X et sa densité spectrale.

   (c) On suppose que $(X_1, \cdots, X_n)$ est connu. Rappeler la définition de l'autocovariance empirique $\widehat{r}_n(\cdot)$ de X et le théorème central limite multidimensionnel vérifié par $(\widehat{r}_n(k))_{0\leq k\leq K}$ pour $K \in \mathbf{N}$ (on exprimera la covariance asymptotique sous forme d'intégrales). En déduire un estimateur convergent de α et de σ^2 (parmi plusieurs possibilités) et sa vitesse de convergence (en puissance de n).

   (d) Lorsque α tel que $|\alpha| < 1$ est connu, on désire calculer un prédicteur $\widehat{X}_{n+1}$ connaissant $(X_{n-k})_{k\in\mathbf{N}}$. Que proposeriez vous? Et si α est inconnu?

Proof. (a) Ce processus est un MA(2) causal stationnaire (**0.5 pts**).
(b) On a $r(0) = \sigma^2(1+4\alpha^2+\alpha^4)$, $r(-1) = r(1) = -2\alpha\sigma^2(1+\alpha^2)$, $r(-2) = r(2) = \alpha^2\sigma^2$ et $r(k) = 0$ pour $|k| > 2$ (**1 pt**).
La densité spectrale de X est $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2\big(1+4\alpha^2+\alpha^4 - 4\alpha(1+\alpha^2)\cos\lambda + 2\alpha^2\cos(2\lambda)\big)$ (**1 pt**).
(c) On a $\widehat{r}_n(k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-k} X_i X_{i+k} - \big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\big)^2$ (**0.5 pt**).
D'après le cours on a $\sqrt{n}\Big(\widehat{r}_n(k) - r(k)\Big)_{1\leq k\leq K} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}_K\big(0,\Sigma\big)$ avec $\Sigma = \Big(4\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos(p\lambda)\cos(q\lambda)f^2(\lambda)d\lambda\Big)_{1\leq p,q\leq K}$ (**0.5 pts**).
Il est clair que $r(1)/r(2) = -2(\alpha^{-1}+\alpha)$, soit $\alpha = (-r(1) \pm \sqrt{r(1)^2 - 16r(2)^2})/4r(2)$ qui existe dans $\mathbf{R}$ car α est bien un réel. Donc on trouve un estimateur en remplaçant $r(k)$ par son estimateur et ainsi, par exemple, $\widehat{\alpha}_n = (-\widehat{r}_n(1) \pm \sqrt{\widehat{r}_n(1)^2 - 16\widehat{r}_n(2)^2})/4\widehat{r}_n(2)$ et $\widehat{\sigma}_n^2 = \widehat{r}_n(2)/\widehat{\alpha}_n^2$ (**1 pt**). Comme $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\sigma}_n^2) = g(\widehat{r}_n(1), \widehat{r}_n(2))$ et comme $(\widehat{r}_n(1), \widehat{r}_n(2))$ vérifie un TLC multidimensionnel avec vitesse $\sqrt{n}$, comme la fonction g est différentiable, d'après la Delta-méthode, $\widehat{\alpha}_n$ et $\widehat{\sigma}_n^2$ vérifient un TLC avec vitesse $\sqrt{n}$ (**1 pt**).
(d) On peut inverser la formule définissant X et on obtient $X_n = \varepsilon_n - \sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\alpha^i X_{n-i}$. On en déduit donc que $\widehat{X}_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, (X_{n-k})_{k\in\mathbf{N}}) = -\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\alpha^i X_{n-i}$ (**2 pts**). Si α est inconnu, on le remplace dans l'expression précédente par $\widehat{\alpha}_n$, soit $\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\widehat{\alpha}_n^i X_{n-i}$ (**0.5 pts**). □