Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Première Année Master M.A.E.F. 2006 – 2007

Statistiques I

Examen de septembre 2007

Examen de 3 h 00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit la fonction $f_a(x) = k(a - a^2 \cdot x) \cdot \mathbb{I}_{\{-1/a \leq x \leq 0\}}$ où $a > 0$.
   (a) Déterminer k pour que f_a soit une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue et tracer un exemple de cette densité.
   (b) On suppose que X est une variable aléatoire de densité f_a. Déterminer $\mathbb{E}X$ et var$X$.
   (c) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que la densité de X_n soit f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite en probabilité de $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ lorsque $n \to \infty$.
   (d) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de v.a.i.i.d. de même densité f_a. On suppose que a est inconnu. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{a}_n$ pour a. Calculer la fonction de répartition de $\widehat{a}_n$ et en déduire sa convergence en probabilité vers a.
   (e) Pour $\alpha > 0$, déterminer un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour a.
   (f) Déterminer le test du rapport de vraisemblance de niveau α pour tester l'hypothèse $H_0 \ : \ a = a_0$, contre l'hypothèse $H_1 \ : \ a \neq a_0$ et déterminer la zone d'acceptation du test en fonction de α.
   (g) Proposer un autre estimateur convergent de a.

2. Une compagnie fabrique des piles et s'intéresse à savoir quelle est leur durée de vie moyenne T. Pour ce faire, on considère 1000 piles produites le même jour que l'on soumet à la même activité. Comme on ne veut pas attendre que toutes les piles soient usées, on décide d'arrêter l'expérience au bout de 10 jours et de compter combien sont encore "en vie". Soit N_{10} ce nombre.
   (a) Dans une première approximation, on suppose que la durée de vie d'une pile peut être modélisée par une loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$. Quelle est alors la durée de vie moyenne (théorique) T d'une pile en fonction de β ? Quelle est, en fonction de T, la probabilité qu'une pile meure avant 10 jours ? Montrer alors que $N_{10}/1000$ suit approximativement un théorème de la limite centrale dont on précisera les paramètres en fonction de T. En déduire alors un estimateur $\widehat{T}$ de T en fonction de $N_{10}/1000$ dont on donnera un théorème de la limite centrale.
   (b) Montrer que N_{10} n'est pas une statistique exhaustive pour le paramètre T par rapport à l'échantillon des 1000 durées de vie des piles. Et si l'on avait attendu x jours au lieu de 10 ? Déterminer alors une équation vérifiée par x tel que $\widehat{T}$ estime "le mieux" T (donc trouver x tel que $\widehat{T}$ soit de variance minimale). Ce résultat vous semble t-il en pratique intéressant ?