Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \mapsto \cos(x)\sin^2(x)$.

Proof. $f(x) = -\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos(x)$. □

(2) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(x)dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x)dx$.

Proof. Voir le corrigé de 2011. □

(3) **(*)** Soit la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = 0$ si $|x| < \pi/2$ et $f(x) = 1$ si $\pi/2 \leq |x| \leq \pi$.

(a) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série de Fourier converge-t'elle vers f ? En quel sens ?

(b) En déduire les sommes des séries $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Proof. (a) f est une fonction paire, donc $b_n(f) = 0$. Un calcul d'intégrale, nous donne $a_0 = 1$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k} = 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi}$. La série de Fourier associée à f est donc $S_{2N+2}(f)(x) = S_{2N+1}(f)(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\cos((2k+1)x)$. D'apres Dirichlet, $S_N(f)$ converge vers f simplement sur l'ensemble des points de continuité de f.

(b) On applique Dirichlet au point $x = 0$ et l'on obtient $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. Le théoreme de Bessel nous donne $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

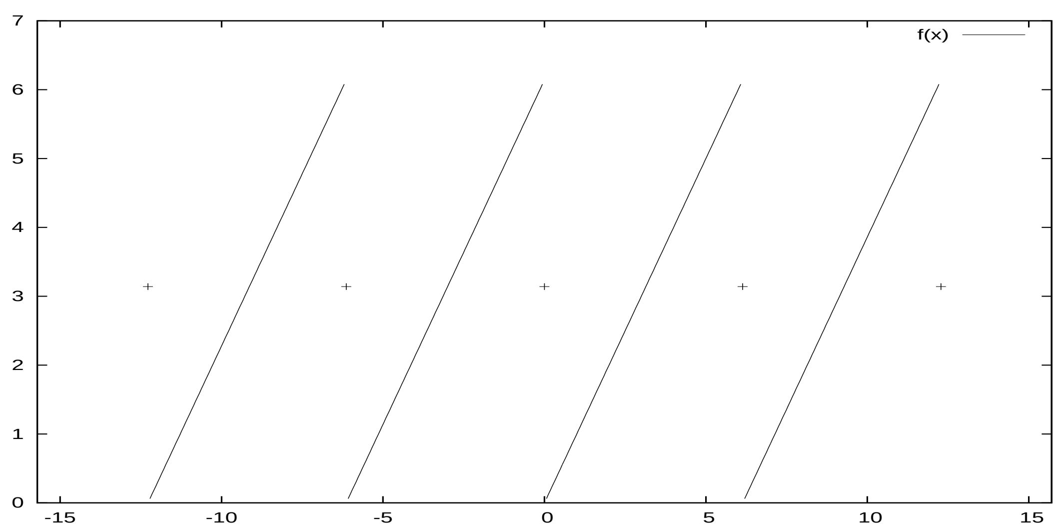
□

(4) **(**)** Soit f la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = (\pi - x)x$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

Proof. Voir le corrigé de 2011. □

(5) **(*)** Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = x$ et par $f(0) = \pi$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coincide-t-elle avec la somme de série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

Proof. Voici le graphe de la fonction f sur $[-4\pi, 4\pi]$.



Un calcul d'intégrale, nous donne $a_0 = 2\pi$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = 0$ et $b_n = -\frac{2}{n}$. Pour tous les points de $[-\pi, \pi]$, f coincide avec sa série de Fourier. C'est à dire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a $f(x) = \pi - 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin(nx)$. En appliquant Dirichlet au point $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. En appliquant Bessel, on obtient $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$.
  (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
  (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
  (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
  (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Proof. Voir le corrigé de 2011. □

(7) **(**)** Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire f définie par $f(x) = \max(\cos x, \sin x)$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire?

Proof. f est une fonction impaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. $b_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}$ et pour tout $n \geq 2$, $b_n = \frac{2n}{\pi(n^2-1)} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi(n^2-1)} \sin(n\frac{\pi}{4})$. Appliquons Dirichlet au point $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{8k+2} - \frac{1}{8k+6} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}$. □

(8) **(**)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$ (attention au domaine d'existence de la série).

Proof. Voir le corrigé de 2011. Pour une autre version, voir le corrigé de 2009. □

(9) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Proof. Voir le corrigé de 2009 ou 2010. □