Correction de quelques exercices de la feuille n^o 5:

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Exo 2 **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien. Montrer que l'application $\psi(x,y) =< x, y >$ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer que la forme quadratique associée à ψ est définie positive.

Proof. Soient λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$. Alors $\psi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 < x, y_1 > + \lambda_2 < x, y_2 >$. De plus, $\psi(x,y) = \psi(y,x)$ (symétrie du produit scalaire). La forme quadratique associée s'écrit: $q(x,x) =< x, x >= \|x\|^2$, définie positive (propriétés de la norme). □

Exo 3 **(*)** Soit $(E, <.,.>)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E. Montrer que l'application $\Phi(x) =< x, u(x) >$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E. Déterminer l'endomorphisme associé à Φ.

Proof. Soit λ dans $\mathbb{R}$, $\Phi(\lambda x) =< \lambda x, u(\lambda x) >=< \lambda x, \lambda u(x) >= \lambda^2 < x, u(x) > \lambda^2 \Phi(x)$. De plus, pour tout x, y dans E^2, $\Phi(x+y) =< x+y, u(x)+u(y) >=< x, u(x) > + < y, u(y) > + < x, u(y) > + < y, u(x) >= \Phi(x) + \Phi(y) + < x, u(y) > + < y, u(x) >$. On pose $\psi(x,y) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < y, u(x) >)$ et on montre facilement que c'est une forme bilinéaire symétrique. On peut alors conclure que Φ est bien une forme quadratique.
Soit v l'endomorphisme associé à Φ. On sait que : $\psi(x,y) =< x, v(y) >$ or $\psi(x,y) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < y, u(x) >) = \frac{1}{2}(< x, u(y) > + < x, u^*(y) >) = \frac{1}{2} < x, u(y) + u^*(y) >$. On a alors, $v(x) = \frac{1}{2}(u(x) + u^*(x))$. □

Exo 11 **(**)** Suivant la valeur de λ, étudier la signature de la forme quadratique suivante:

$$\Phi(x,y) = (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)x\,y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proof. Signature de Φ:

- Si $\lambda = -1$, $\Phi(x,y) = (x-y)^2 - (x+y)^2$, $sgn(\Phi) = (1,1)$
- Si $\lambda \neq -1$, $\Phi(x,y) = (1+\lambda)(x + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}y)^2 + (1 + \lambda - \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2})y^2$
  - Si $\lambda < -1, sgn(\Phi) = (0,2)$
  - Si $-1 < \lambda < 0, sgn(\Phi) = (1,1)$
  - Si $\lambda > 0, sgn(\Phi) = (2,0)$
  - Si $\lambda = 0, sgn(\Phi) = (1,0)$

□

Exercice 7 :

Soit $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$; $\Phi(M) = \det(M)$

ⓐ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^4$

$\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$; $\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Sachant que $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Montrons que Φ est une forme quadratique ?

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(\lambda M) = \Phi\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \lambda^2(ad - bc) = \lambda^2 \Phi(M)$

- Soit $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\Phi(M + M') = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$

$= \det\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = (a+a')(d+d') - (b+b')(c+c')$

$= (ad - bc) + (a'd' - b'c') + ad' + a'd - bc' - b'c$

$= \Phi(M) + \Phi(M') + 2\left(\frac{1}{2}(ad' + a'd - bc' - b'c)\right)$

notons par $\Psi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie

par $\Psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(ad' + a'd - bc' - b'c)$.

Il est clair que Ψ est une forme linéaire

sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. ($\Psi$ est la forme linéaire associée à la forme quadratique Φ, et Φ est donc une forme quadratique sur $M_2(\mathbb{R})$.

b) Notons que $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right.$

$\left. e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$

(qui est un ev de dimension 4)

donc d'après la formule du cours, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}$ est la matrice de Φ, les coef de la matrice doivent vérifier la formule

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} x_i x_j$$

ainsi $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est la matrice de la forme quadratique Φ.

⚠ On peut aussi obtenir la matrice A, à partir de la forme bilinéaire φ, via la formule suivante

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4} \; ; \; a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

où les $(e_i)_{i=1..4}$ sont les elts de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

⚠ La forme bilinéaire associée à Φ est la forme φ trouvée dans la question (a).
Sinon, on peut aussi trouver la forme φ à partir de la matrice de la forme quadratique, par la formule suivante

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(ad' + a'd - bc' - b'c\right)$$

c) $\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

En utilisant l'égalité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

on obtient $ad - bc = \frac{1}{4}\left((a+d)^2 - (a-d)^2\right)$
$- \frac{1}{4}\left((b+c)^2 - (b-c)^2\right)$

ainsi $\Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(a+d)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2 - \frac{1}{4}(a-d)^2 - \frac{1}{4}(b+c)^2$

(ainsi la signature de Φ est $S = (2,2)$)

$\longrightarrow$ En déduire une bon pour Φ ?

Soit $\begin{cases} x = a+d \\ y = b-c \\ z = a-d \\ t = b+c \end{cases}$

ainsi $a = \frac{1}{2}(x+z)$, $b = \frac{1}{2}(t+y)$
$c = \frac{1}{2}(t-y)$, $d = \frac{1}{2}(x-z)$

donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+z) & \frac{1}{2}(t+y) \\ \frac{1}{2}(t-y) & \frac{1}{2}(x-z) \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+z & t+y \\ t-y & x-z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$+ \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ainsi $\left\{ \tilde{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \tilde{e}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormale

sur Φ ■

<u>Rappel</u> Sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A^t B)$ est un produit scalaire

$\|A\| = (\langle A, A \rangle)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}$ est la norme

sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\longrightarrow$ Il est clair que $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

et que $(\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_i \rangle)^{1/2} = \|\tilde{e}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$

Ce qui fait $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$: bon de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ■

Exercice 8

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

a) Mq q est définie positive.

⚠ q est dite positive si $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

et dite définie positive si $q(x) \geq 0$ et $q(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Écrivons q comme étant une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires, linéairement indépendantes en utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gauss.

$$q(x) = 2x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1^2 + x_1(x_2+x_3)\right) + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2(x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 2x_3^2$$
$$+ 2x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 - \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} - x_2x_3 + x_2^2 + 2x_3^2$$
$$+ 2x_2x_3$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 + 2x_2x_3\right) + \frac{3}{2}x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2+x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{3}{2}x_3^2$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2+x_3\right)^2 + x_3^2$$

ainsi $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

Notons ici que la signature de q est $S=(3,0)$ et que q est positive. (ie $q(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}^3$)

Or $q(x)=0 \Rightarrow$

$$2\left(x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2+x_3^2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

ce qui donne $x=(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)=0_{\mathbb{R}^3}$

donc q est définie positive

b) l'ensemble des vecteurs isotropes de q sont les $x\in\mathbb{R}^3$ tels que $q(x)=0$

or d'après la question précédente on déduit que le seul vecteur isotrope est $x=0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$

⚠ Contrairement aux applications linéaires, l'ensemble $\{x\in E ;\ q(x)=0\}$ n'est pas un sev de E.

Exercice 9

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$

donc le discriminant de P est $b^2 - 4ac$.

Ainsi on peut voir Φ de la façon suivante

$$\Phi(P) = \Phi(ax^2 + bx + c) = \Phi((a, b, c)) = b^2 - 4ac$$

a) Mq Φ est une forme quadratique : soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\Phi(\lambda P) = \Phi(\lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c) = (\lambda b)^2 - 4(\lambda a)(\lambda c)$
  $= \lambda^2 (b^2 - 4ac) = \lambda^2 \Phi(P)$

- Sachant que si $P = ax^2 + bx + c$ et $P' = a'x^2 + b'x + c'$

$P + P' = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$

le discriminant de $P + P' = (b + b')^2 - 4(a + a')(c + c')$

$= b^2 - 4ac + b'^2 - 4a'c' + 2bb' - 4ac' - 4a'c$

$\Rightarrow \Phi(P + P') = (b^2 - 4ac) + (b'^2 - 4a'c') + 2(bb' - 2ac' - 2a'c)$

$= \Phi(P) + \Phi(P') + 2\Psi(P, P')$

où $\Psi(P, P') = bb' - 2ac' - 2a'c$ est une forme bilinéaire symétrique (facile à vérifier !)

(En fait Ψ est la forme bilinéaire associée à Φ)

<u>conclusion</u> : Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$

b) notons que $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ donc A : la matrice représentative de Ψ la forme bilinéaire associée à Φ, est une matrice symétrique de $M_3(\mathbb{R})$.

Sachant que $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$

$a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $\Phi(P) = \Phi(a.b.c) = b^2 - 4ac$

Utilisant la relation $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, on obtient

$$\Phi(P) = \Phi(a.b.c) = b^2 - \left((a+c)^2 - (a-c)^2\right)$$
$$= (a-c)^2 + b^2 - (a+c)^2$$

$\longrightarrow$ pour chercher une Bon de Φ, on refait le m̂ calcul que Ex 7.c en resolvant

$$\begin{cases} x = a - c & \Rightarrow a = \frac{1}{2}(x+z) \\ y = b & \Rightarrow b = y \\ z = a+c & \Rightarrow c = \frac{1}{2}(z-x) \end{cases} \quad \ldots\ldots$$

d) C'est du calcul