Feuille n^o 2:

Une application en analyse: les séries de Fourier

(1) **(*)** Déterminer le développement en série de Fourier de $f(x) = \cos^2(x)\sin(x)$.

Proof. $f(x) = \frac{1}{4}\left(\sin(3x) + \sin(x)\right)$. □

(2) **(*)** Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux. Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(x)dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x)dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

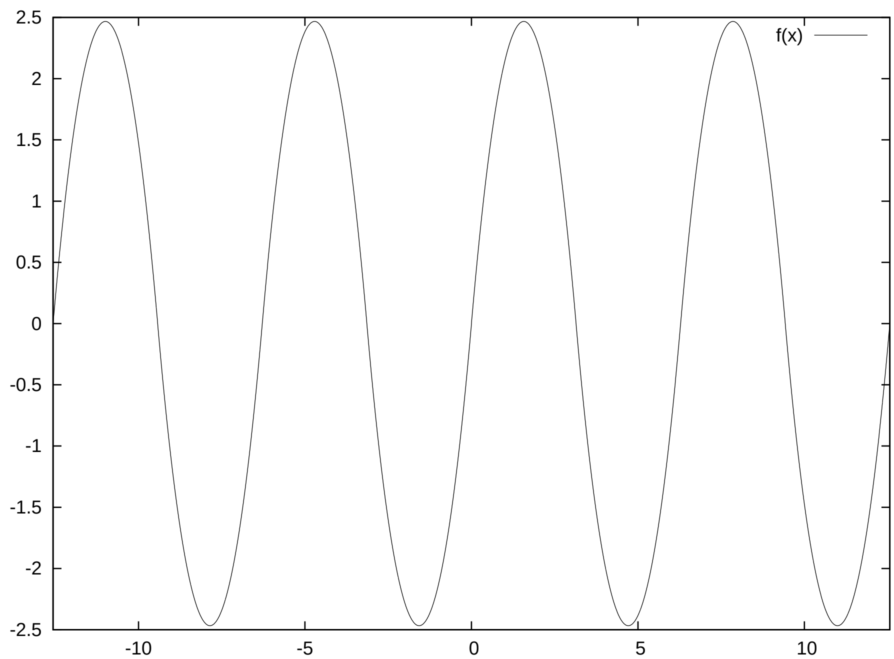
Proof. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe un entier k tel que $2k\pi - \pi \le a \le 2k\pi + \pi$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} f(y-2k\pi)dy = \int_{2k\pi-\pi}^{2k\pi+\pi} f(y)dy = \int_{2k\pi-\pi}^{a} f(y)dy + \int_{a}^{2k\pi+\pi} f(y)dy \\ &= \int_{2k\pi+\pi}^{a+2\pi} f(z-2\pi)dz + \int_{a}^{2k\pi+\pi} f(y)dy = \int_{2k\pi+\pi}^{a+2\pi} f(z)dz + \int_{a}^{2k\pi+\pi} f(y)dy = \int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx \\ &= \int_{a}^{a+\pi} f(x)dx + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_{a-2\pi}^{a-\pi} f(y+2\pi)dy + \int_{a+\pi}^{a+2\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

(4) **(**)** Soit f la fonction impaire, de période 2π telle que $f(x) = (\pi - x)x$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?

Proof. Voici le graphe de la fonction f.



f est impaire donc $a_n(f) = 0$. Il nous reste à calculer $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)x\sin(nx)dx = 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx$

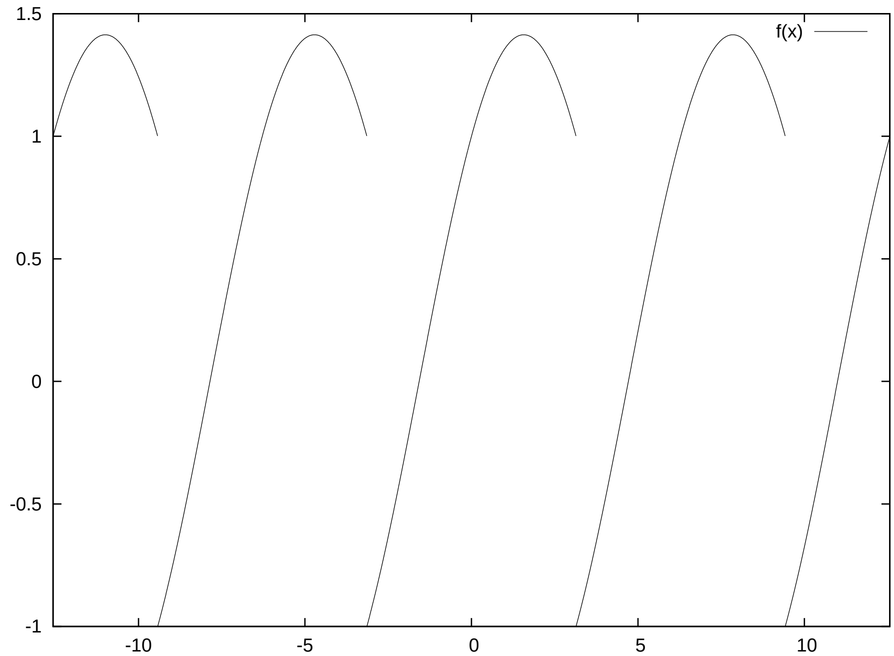
$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = -\frac{1}{n}\left[x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx &= -\frac{1}{n}\left[x^2\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\end{aligned}$$

On en conclut que $b_n(f) = \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right)$: i.e. $b_{2k}(f) = 0$ et $b_{2k+1}(f) = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$.
D'où $f(x) = \sum_{k\ge 1} b_{2k+1}\sin\left((2k+1)x\right)$ (car $f \in \mathcal{C}^1$). On applique le théorème de Dirichlet au point $x = \frac{\pi}{2}$. On obtient donc $\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$. D'oú $\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.
Appliquons le théorème de Bessel. $\frac{32}{\pi^2}\sum_{k\ge 0}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^2x^2dx = \frac{\pi^4}{15}$. Ce qui nous donne $\sum_{k\ge 0}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ □

(6) **(**)** On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$.
 (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
 (b) Calculer les coefficients de Fourier de f.
 (c) Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f?
 (d) Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Proof. (a)



(b) La fonction f n'est ni paire ni impaire.

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx = \frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_f(x)$ converge car f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Et pour tout $x \neq \pi \mod (2\pi)$, $f(x) = S_f(x)$.
(d) Appliquons le théorème de Dirichlet au point $x = \pi$. $\frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)(-1)^n = \frac{1}{2}(f(\pi^+) + f(\pi^-)) = 0$. On en déduit que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

□

(8) **(**)** En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre l'équation différentielle $y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = |\cos t|$ (attention au domaine d'existence de la série).

Proof. Pour la recherche de toutes les solutions de cette équation, nous renvoyons le lecteur à son/un cours d'équation différentielle. Attardons nous sur la recherche d'une solution particulière. Cherchons une solution $y(t)$ de la forme $y(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right)$. Un petit calcul de dérivées nous donne
$y^{(4)} + 3y^{(2)} + 2y = a_0 + \sum_{n\geq 1}(2 - 3n^2 + n^4)\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right)$. Le développement en série de Fourier de $t \mapsto |\cos(t)|$ est $|\cos(t)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{k\geq 1}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kt)$. Par identification on obtient, $a_0 = \frac{2}{\pi}$, $\forall n \geq 1, b_n = a_{2n+1} = 0$ et a_{2n} satisfait $(2-12n^2+16n^4)a_{2n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$. D'où la solution particulière, $y(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{4}{pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)(2-12n^2+16n^4)}$.
Pour être tout à fait complet, voici sans justification l'ensemble des solutions. y est solution s'il existe quatre réels a, b, c, d tels que $y(t) = a\cos(t) + b\sin(t) + c\cos(\sqrt{2}t) + d\sin(\sqrt{2}t) + y^*(t)$ où y^* est la solution particulière trouvée pécédemment.

□

(9) **(***)** Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Proof. Voir le corrigé de l'an dernier. (Où l'on retrouvera d'autres exercices corrigés.) □