Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. Soit $E = \mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On considère l'application

$$(P, Q) \in E^2 \mapsto < P, Q > = \sum_{k=0}^{\min(deg(P), deg(Q))} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0),$$

où $deg(P)$ désigne le degré de P et $P^{(k)}(0)$ la k-ème dérivée de P en 0.

   (a) Pour $n \in \mathbf{N}$, et $P(X) = X^n$, calculer $P^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$, puis $< X^n, X^n >$.

   (b) Montrer que pour tout polynôme P de E, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$.

   (c) En déduire que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

   (d) Calculer $< X^m, X^n >$ pour $m \neq n \in \mathbf{N}$. En déduire que $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base orthogonale sur $(E, < \cdot, \cdot >)$. En déduire également une base orthonormale de sur $(E, < \cdot, \cdot >)$.

   (e) Soit $F = \{P \in E \quad \text{tel que} \quad P(2) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(F) = \infty$.

   (f) Déterminer $F^{\perp}$.

   (g) Soit le polynôme $R(X) = X^2 - 3X + 2$. Déterminer $d(R, F) = \inf_{P \in F} \|R - P\|$, où $\| \cdot \|$ est la norme associée à $< \cdot, \cdot >$.

2. Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien. Soit $u \in E$ tel que $< u, x >^2 = < x, x >< u, u >$ pour tout $x \in E$. Déterminer u.