Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°1, mars 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **[18 points]** Soit $E = \mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On considère l'application

$$(P,Q) \in E^2 \mapsto < P,Q >= \sum_{k=0}^{\min(deg(P),deg(Q))} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0),$$

où $deg(P)$ désigne le degré de P et $P^{(k)}(0)$ la k-ème dérivée de P en 0.

(a) Pour $n \in \mathbf{N}$, et $P(X) = X^n$, calculer $P^{(k)}(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$, puis $< X^n, X^n >$.

(b) Montrer que pour tout polynôme P de E, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$.

(c) En déduire que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

(d) Calculer $< X^m, X^n >$ pour $m \neq n \in \mathbf{N}$. En déduire que $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthogonale sur $(E, < \cdot, \cdot >)$. En déduire également une base orthonormale de sur $(E, < \cdot, \cdot >)$.

(e) Soit $F = \{P \in E \quad \text{tel que} \quad P(2) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(F) = \infty$.

(f) Déterminer $F^\perp$.

(g) Soit le polynôme $R(X) = X^2 - 3X + 2$. Déterminer $d(R,F) = \inf_{P\in F} \|R - P\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme associée à $< \cdot, \cdot >$.

Proof. (a) On a $P^{(k)}(X) = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)X^{n-k}$ pour $k \leq n$ et $P^{(k)}(X) = 0$ pour $k \geq n+1$. Donc $P^{(k)}(0) = 0$ si $k \leq n-1$ et $P^{(n)}(0) = n!$, puis $P^{(k)}(0) = 0$ si $k \geq n+1$ **[2pt]**. On en déduit que $< X^n, X^n >= (n!)^2$ **[1pt]**.
(b) La formule de Taylor à l'ordre $deg(P)$ appliquée à P donne directement $P(x) = \sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + O(x^{deg(P)+1})$. pour tout $x \in \mathbf{R}$. Mais comme P est de degré $deg(P)$, d'après l'unicité d'écriture d'un polynôme de degré $deg(P)$ alors $P(x) = \sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ **[2pt]**.
(c) Les propriétés de linéarité et de symétrie sont immédiates. De plus $< P,P >= \sum_{k=0}^{deg(P)} (P^{(k)}(0))^2 \geq 0$. Enfin si $< P,P >= 0$ alors $P^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0,1,\dots,deg(P)\}$. Mais d'après la question précédente, cela induit que $P(x) = \sum_{k=0}^{deg(P)} 0 \times \frac{x^k}{k!} = 0$ pour tout x. Donc $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E **[2pt]**.
(d) $< X^m, X^n >= 0$ **[1pt]**. On sait que $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de E. De plus, comme X^m et X^n sont orthogonaux dès que $m \neq n$, alors $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien une base orthogonale de E **[1pt]**.
Enfin, comme $\|X^n\| = n!$, alors $(\frac{X^n}{n!})_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthonormale de E **[1pt]**.
(e) F est un sev car $0 \in F$ et si $P,Q \in F$ si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $(P+\lambda Q)(2) = P(2) + \lambda Q(2) = 0$ donc $P + \lambda Q \in F$ **[1pt]**. Il est clair que $\left(X^k - 2^k\right)_{k\geq 1}$ est une famille libre de F (car tous les polynômes ont un degré différent). Cette famille étant infinie on en déduit que $\dim(F) = \infty$ **[2pt]**.
(f) Soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in F^\perp$. Alors pour tout $k \geq 1$, on a $< P, X^k - 2^k >= -2^k a_0 + (k!)^2 a_k = 0$ quand $k \leq n$ et $< P, 1 - X^k >= -2^k a_0 = 0$ quand $k \geq n+1$. Par itération, on en déduit que $a_i = 0$ pour tout i et donc $P = 0$ **[3pt]**.
(g) Comme $R \in F$, on en déduit que $d(R,F) = 0$ **[2pt]**. □

2. **[5 points]** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien. Soit $u \in E$ tel que $< u, x >^2 = < x, x >< u, u >$ pour tout $x \in E$. Déterminer u.

Proof. On a donc l'égalité de Cauchy-Schwarz, ce qui implique que u et x sont liés, et ceci quelque soit $x \in E$ **[1pt]**. Aussi, quand $\dim(E) = 1$, ceci est toujours vrai, donc u est un vecteur quelconque de E **[1.5pt]**. Si $\dim(E) \geq 2$, si $u \neq 0$, il existe toujours $v \neq 0$ tel que u et v sont orthogonaux, soit $< u, v >= 0$. Comme $< u, x >^2 = < x, x >< u, u >$ pour tout $x \in E$, ceci est aussi vrai pour $x = v$ donc $\|v\|^2 \|u\|^2 = 0$ soit $v = 0$ ou $u = 0$: impossible. Donc $u = 0$ **[2.5pt]**. □