Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2010 - 2011$

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(20 points)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et pour f, g deux fonctions de E, on considère l'application
$$< f, g >= f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)dt.$$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer que $\dim E = \infty$.
   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
   (c) Soit F_m l'ensemble des fonctions de E monotones sur $[-1,1]$. Montrer que F_m n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Rappeler la définition de $F_m^{\perp}$; cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de E (le démontrer)?
   (d) Soit F_p et F_i l'ensemble des fonctions de E respectivement paires et impaires. Montrer que F_p et F_i sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (e) Montrer que $E = F_p \oplus F_i$ (on pourra utiliser le fait que pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$).
   (f) Montrer que si $f \in E$ est impaire alors f' est paire. Montrer que $F_p \subset F_i^{\perp}$ puis montrer que $F_p = F_i^{\perp}$.
   (g) On remplace désormais E par $E' = \mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, en conservant le même produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Déterminer des bases orthonormales de F_p et de F_i dans ce cas. En déduire une base orthonormale de E'. Déterminer enfin $F_m^{\perp}$.

2. **(4 points)** Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. On note respectivement p_F et p_G les projecteurs orthogonaux sur F et G.
   (a) Rappeler les définitions de p_F et p_G après avoir expliqué pourquoi ces projecteurs existent.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|p_G(x)\|$.