Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2010 - 2011$

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(20 points)** Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et pour f, g deux fonctions de E, on considère l'application
$$< f, g >= f(0)g(0) + \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)dt.$$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer que $\dim E = \infty$.
   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
   (c) Soit F_m l'ensemble des fonctions de E monotones sur $[-1,1]$. Montrer que F_m n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Rappeler la définition de $F_m^\perp$; cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de E (le démontrer)?
   (d) Soit F_p et F_i l'ensemble des fonctions de E respectivement paires et impaires. Montrer que F_p et F_i sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (e) Montrer que $E = F_p \oplus F_i$ (on pourra utiliser le fait que pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$).
   (f) Montrer que si $f \in E$ est impaire alors f' est paire. Montrer que $F_p \subset F_i^\perp$ puis montrer que $F_p = F_i^\perp$.
   (g) On remplace désormais E par $E' = \mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, en conservant le même produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Déterminer des bases orthonormales de F_p et de F_i dans ce cas. En déduire une base orthonormale de E'. Déterminer enfin $F_m^\perp$.

Proof. (a) On montre facilement que E est un sev de l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ **[1pt]**.
La famille de fonctions $(1, x, x^2, \cdots)$, qui est une famille libre et infinie, appartient à E donc $\dim E = \infty$ **[1pt]**.
(b) La symétrie, la linéarité et la positivité sont évidentes **[1pt]**. Montrons que $< f, f >= 0 \Longrightarrow f = 0_E$. Mais $< f, f >= f^2(0) + \int_{-1}^{1} (f'(t))^2 dt$ donc $< f, f >= 0 \Longrightarrow f(0) = 0$ et $\int_{-1}^{1} (f'(t))^2 dt = 0$. Comme f' est une fonction continue, il en est de même pour $(f')^2$ qui est positive: d'après un résultat du cours, on a donc $(f'(t))^2 = 0$ pour $t \in [-1,1]$, soit $f'(t) = 0$ pour $t \in [-1,1]$. De cela on en déduit que $f(t) = c$ pour $t \in [-1,1]$ avec c une constante réelle, mais comme $f(0) = 0$ on en déduit que $f = 0_E$ **[2pts]**.
(c) Si on considère les fonctions f et g définies sur $[-1,1]$ telles que $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,1]$ et 0 sinon, $g(x) = x^2$ pour $x \in [-1,0]$ et 0 sinon, il est clair que f et g sont dans F_m (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$ clairement, mais également en 0 en regardant la limite en 0 de f' et de g'). Mais $f + g$ n'est clairement pas une fonction monotone. Donc F_m n'est pas stable par l'addition donc ce n'est pas un sev de E **[2pts]**.
On a $F_m^\perp = \{f \in E,\ \forall g \in F_m,\ \ < f, g >= 0\}$ **[0.5pts]**. On reprend la démonstration du cours pour montrer que $F_m^\perp$ est un sev de E **[0.5pts]**.
(d) Si f_1 et f_2 sont paires, pour tout $x \in [-1,1]$, $\lambda_1 f_1(-x) + \lambda_2 f_2(-x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est paire: F_p est un sev de E (même chose pour F_i) **[0.5pts]**.
(e) Si $f \in F_i \cap F_p$ alors pour tout $x \in [-1,1]$, $f(-x) = f(x)$ car $f \in F_p$ et $f(-x) = -f(x)$ car $f \in F_i$, donc $f(x) = -f(x)$, ce qui implique que $f(x) = 0$. Donc $F_i \cap F_p = \{0_E\}$ **[0.5pts]**. De plus, comme $f(x) =$

$\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ avec $f_p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ une fonction paire et $f_i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ une fonction impaire, on voit que toute fonction de E s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On en déduit que $E=F_p+F_i$ et avec ce qui précède, $E=F_p\oplus F_i$ **[1pt]**.
(f) Si on a $f(x)=f(-x)$ pour tout $x\in[-1,1]$, alors en dérivant $f'(x)=-f'(-x)$ donc f' est bien impaire (et vice-versa) **[0.5pts]**.
Soit $f\in F_p$, donc f' est impaire. Alors pour toute fonction $g\in F_i$ donc pour g impaire, soit g' paire, $<f,g>=f(0)g(0)+\int_{-1}^1 f'(t)g'(t)dt$. Mais comme g est impaire, $g(0)=0$ et comme la fonction $f'g'$ est impaire (produit d'une fonction paire par une fonction impaire), on en déduit que $\int_{-1}^1 f'(t)g'(t)dt=0$. Ainsi $<f,g>=0$, donc $f\in F_i^\perp$. En conséquence, on a bien $F_p\subset F_i^\perp$ **[1.5pts]**.
Soit $f\in F_i^\perp$. On peut donc écrire $f=f_p+f_i$ d'après (e). Par définition, pour tout $g\in F_i$, on a $<f_p+f_i,g_i>=0$. Comme f_p est paire et g_i impaire, comme précédemment, $<f_p,g_i>=0$. Par suite on a nécessairement $<f_i,g_i>=0$. Mais ceci doit être aussi vrai pour $g_i=f_i$ puisque ceci est vrai pour toute fonction $g_i\in F_i$ et $f_i\in F_i$. Ainsi $<f_i,f_i>=0$ et d'après la propriété 4 du produit scalaire, cela signifie que $f_i=0_E$. D'où $f=f_p$ ce qui signifie que f est paire. En conséquence, $F_i^\perp=F_p$ **[3pts]**.
(g) Il est clair que comme $(1,X,X^2)$ est une base de E', comme $E'=F_p\oplus F_i$, alors $(1,X^2)$ est une base de F_p et que (X) est une base de F_i. Donc $(X/\|X\|)=(X/\sqrt{2})$ est une base orthonormale de F_i. Et avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, avec $\|1\|=1$ et $<1,X^2>=0$, $\left(1,\frac{X^2-<1,X^2>}{\|X^2-<1,X^2>\|}\right)=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}X^2\right)$ est une base orthnormale de F_p **[2pts]**.
D'après (f), F_i et F_p sont orthogonaux, donc $\left(1,\frac{X}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}X^2\right)$ est une base orthonormale de E' **[1pt]**.
Il est clair que les fonctions 1, X et $(X-1)^2$ sont des fonctions monotones de E'. Donc $\mathrm{Vect}(F_m)=E'$ car ces trois fonctions sont libres et génératrices dans E'. Or $F_m^\perp=\mathrm{Vect}(F_m)^\perp$ d'où $F_m^\perp=\{0_{E'}\}$ **[2pts]**.

□

2. **(4 points)** Soit $(E,<\cdot,\cdot>)$ un espace euclidien. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F\subset G$. On note respectivement p_F et p_G les projecteurs orthogonaux sur F et G.
   (a) Rappeler les définitions de p_F et p_G après avoir expliqué pourquoi ces projecteurs existent.
   (b) Montrer que pour tout $x\in E$, $\|p_F(x)\|\le\|p_G(x)\|$.

Proof. (a) Ces projecteurs existent car la dimension de E est finie (cours) **[0.5pts]**. Pour tout $x\in E$, $p_F(x)=\sum_{i=1}^k <x,e_i>e_i$ où $(e_i)_{1\le i\le k}$ est une base orthonormale de F **[0.5pts]**.
(b) Si $F=G$, la propriété est évidente. Sinon, il est clair qu'en posant $H=F^\perp\cap G$, $G=F\oplus H$ avec $H\subset F^\perp$. Soit maintenant $x\in E$. On a l'unique décomposition $x=x_G+x_{G^\perp}$. Ainsi $p_G(x)=x_G$, $p_F(x)=p_F(x_G)$ car $p_F(x_{G^\perp})=0$ du fait que $G^\perp\subset F^\perp$. Il est clair que pour tout $x\in E$, $p_G(x)=x_G=p_F(x_G)+p_H(x_G)=p_F(x)+p_H(x)$ car dans G, H est l'orthogonal de F. Mais comme $H\subset F^\perp$, alors $p_F(x)$ et $p_H(x)$ sont orthogonaux. On peut donc appliquer le Théorème de Pythagore et ainsi $\|p_F(x)\|^2+\|p_H(x)\|^2=\|p_G(x)\|^2$, d'où $\|p_F(x)\|\le\|p_G(x)\|$ **[3pts]**. □