Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(11 points)** Soit E un espace vectoriel muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norme de x.

   (a) On considère
   $$B = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}.$$
   Montrer que B n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $x \in E \setminus \{0_E\}$ alors $x/\|x\| \in B$. En déduire que $B^\perp = \{0_E\}$. Soit x_0 et x_1 deux vecteurs de B. Montrer que $x_0 - x_1$ est orthogonal à $x_1 + x_0$.

   (b) Soit F, F_1 et F_2 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ alors $F_1 + F_2 \subset F$ (on rappelle que $F_1 + F_2 = \{a_1 + a_2,\ a_1 \in F_1,\ a_2 \in F_2\}$). En déduire que si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$.

   (c) On suppose que E est de dimension finie. En utilisant des bases orthonormales de G_1 et G_2, deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que $G_1^\perp + G_2^\perp = (G_1 \cap G_2)^\perp$.

2. **(Sur 11 points)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ avec $n \geq 2$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in E$ on définit
   $$< x, y >= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^i x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^i y_j\Big).$$

   (a) Pour $n = 3$, calculer $< (2, -1, -2), (4, 0, -2) >$.

   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E. On notera désormais $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norme de $x \in E$.

   (c) Pour $i = 2, 3, \cdots, n$, soit le vecteur $e^i = (e^i_1, \cdots, e^i_n) \in E$ tel que $e^i_{i-1} = 1$, $e^i_i = -1$ et $e^i_k = 0$ pour $k \notin \{i - 1, i\}$. Calculer $\|e^i\|$ pour $i = 2, \cdots, n$. Montrer que $(e^2, e^3, \cdots, e^n)$ forme une famille orthonormale de E.

   (d) On cherche $e^1 \in E$ tel que $(e^1, e^2, \cdots, e^n)$ soit une base orthonormale de E. Montrer que $x_1 = (1, 0, \cdots, 0) \notin F$ où $F = \mathrm{Vect}(e^2, \cdots, e^n)$. Déterminer $P_F(x_1)$ où P_F est la projection orthogonale sur F. En déduire $P_{F^\perp}(x_1)$ puis e^1.