Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Correction du Contrôle continu n°1, mars 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(11 points)** Soit E un espace vectoriel muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Pour $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norme de x.

   (a) On considère
   $$B = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}.$$
   Montrer que B n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $x \in E \setminus \{0_E\}$ alors $x/\|x\| \in B$. En déduire que $B^\perp = \{0_E\}$. Soit x_0 et x_1 deux vecteurs de B. Montrer que $x_0 - x_1$ est orthogonal à $x_1 + x_0$.

   (b) Soit F, F_1 et F_2 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F_1 \subset F$ et $F_2 \subset F$ alors $F_1 + F_2 \subset F$ (on rappelle que $F_1 + F_2 = \{a_1 + a_2,\ a_1 \in F_1,\ a_2 \in F_2\}$). En déduire que si G_1 et G_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$.

   (c) On suppose que E est de dimension finie. En utilisant des bases orthonormales de G_1 et G_2, deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que $G_1^\perp + G_2^\perp = (G_1 \cap G_2)^\perp$.

Proof. (a) On a $0_E \notin B$ donc B n'est pas sev de E **(0.5pts)**. On a $\|x/\|x\|\| = \|x\|/\|x\| = 1$ **(0.5pts)**.
Soit $x \in B^\perp$, $x \neq 0_E$. Alors pour tout $y \in B$, $< x, y >= 0$. Or $y = x/\|x\| \in B$. Donc $< x, x/\|x\| >= 0$, soit $1 = 0$, ce qui est impossible. Donc $x = 0_E$ **(2pts)**.
On a $< x_1 - x_0, x_1 + x_0 >= \|x_1\| - \|x_0\| = 1 - 1 = 0$ d'où le résultat **(1pt)**.
(b) Soit $x_1 \in F_1$. Donc d'après l'hypothèse $F_1 \subset F$, $x_1 \in F$. De même, soit $x_2 \in F_2$, donc $x_2 \in F$. Mais F est un sev de E, donc F est stable par addition, d'où $x_1 + x_2 \in F$. Ainsi $F_1 + F_2 \subset F$ **(1.5pts)**.
On a $G_1 \cap G_2 \subset G_1$. Or on sait que si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$. Donc $G_1^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$. De même, $G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$. D'après ce qui précède, on en déduit donc que $G_1^\perp + G_2^\perp \subset (G_1 \cap G_2)^\perp$ **(2pts)**.
(c) On suppose que $\dim E = n$, $\dim G_1 = n_1$ et $\dim G_2 = n_2$. On sait que $G_1 \cap G_2$ est un sev de E. Donc, d'après le cours, il existe $(e_1, \cdots, e_p)$ une base orthonormale de $G_1 \cap G_2$ (dans le cas où $G_1 \cap G_2 = 0_E$ on pose $p = 0$). Comme $G_1 \cap G_2 \subset G_1$, on peut écrire qu'une base orthonormale de G_1 est $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_{n_1})$. De même, $(e_1, \cdots, e_p, e_{n_1+1}, \cdots, e_{n_1+n_2-p})$ sera une base orthonormale de G_2, et finalement $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Grâce à tout ceci, $G_1^\perp = \mathrm{Vect}(e_{n_1+1}, \cdots, e_n)$, $G_2^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_{n_1}, e_{n_1+n_2-p+1}, \cdots, e_n)$, d'où $G_1^\perp + G_2^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$. Mais on a $G_1 \cap G_2 = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ donc $(G_1 \cap G_2)^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \cdots, e_n)$. Ainsi on a bien $G_1^\perp + G_2^\perp = (G_1 \cap G_2)^\perp$ **(3.5pts)**.

□

2. **(Sur 11 points)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ avec $n \geq 2$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in E$ on définit
   $$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{i} x_j \Big) \Big(\sum_{j=1}^{i} y_j \Big).$$

   (a) Pour $n = 3$, calculer $< (2, -1, -2), (4, 0, -2) >$.

   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E. On notera désormais $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ la norme de $x \in E$.

(c) Pour $i = 2, 3, \cdots, n$, soit le vecteur $e^i = (e_1^i, \cdots, e_n^i) \in E$ tel que $e_{i-1}^i = 1$, $e_i^i = -1$ et $e_k^i = 0$ pour $k \notin \{i-1, i\}$. Calculer $\|e^i\|$ pour $i = 2, \cdots, n$. Montrer que $(e^2, e^3, \cdots, e^n)$ forme une famille orthonormale de E.

(d) On cherche $e^1 \in E$ tel que $(e^1, e^2, \cdots, e^n)$ soit une base orthonormale de E. Montrer que $x_1 = (1, 0, \cdots, 0) \notin F$ où $F = \text{Vect}(e^2, \cdots, e^n)$. Déterminer $P_F(x_1)$ où P_F est la projection orthogonale sur F. En déduire $P_{F^\perp}(x_1)$ puis e^1.

Proof. (a) On a $<(2,-1,-2),(4,0,-2)>= 2*4+(2-1)*(4+0)+(2-1-2)*(4+0-2) = 8+4-2 = 10$ **(0.5pts)**.
(b) On a aisément la symétrie et la bilinéarité **(0.5pts)**. De plus $<x,x>= x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_1+\cdots+x_n)^2$. Donc on a clairement $<x,x>\geq 0$ **(0.5pts)**. Enfin $<x,x>=0$ entraîne que $x_1 = 0$, $x_1+x_2 = 0$, ..., et $x_1+\cdots+x_n = 0$. Ceci entraîne bien que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, donc $x = 0$ **(1pt)**.
(c) On a $\|e^i\|^2 = 0+0+\cdot+1^2+0^2+\cdots+0^2 = 1$, d'où $\|e^i\| = 1$ pour tout $i \in \{2,\cdots,n\}$ **(1pt)**.
Soit $2 \leq i < j \leq n$. Alors si $j = i+1$, $<e_i,e_j>= 0*0+\cdots+0*0+1*0+0*1+0*0+\cdots+0*0 = 0$ et si $j > i+1$, $<e_i,e_j>= 0*0+\cdots+0*0+1*0+0*0+\cdots+0*1+0*0+\cdots+0*0 = 0$. Donc $(e^i)_{2\leq i\leq n}$ forme bien une famille orthogonale. Comme $\|e^i\| = 1$ pour tout i, on en déduit que $(e^2, e^3, \cdots, e^n)$ forme une famille orthonormale de E **(1.5pts)**.
(d) Soit la matrice composée des coordonnées dans $\mathbf{R}^n$ de $(x_1, e^2, \cdots, e^n)$. Il est clair que c'est une matrice carrée triangulaire supérieure avec sur la diagonale une fois 1 et $n-1$ fois -1. Donc son déterminant est $(-1)^{n-1} \neq 0$. Donc la famille $(x_1, e^2, \cdots, e^n)$ est libre, et ainsi $x_1 = (1, 0, \cdots, 0) \notin F$ **(2pts)**.
On a $P_F(x_1) = \sum_{i=2}^n <e^i, x_1> e^i$. Mais $<e^2,x_1>= 1*1+0*1+\cdots+0*1 = 1$, $<e^3,x_1>= 0*1+1*1+0*1+\cdots+0*1 = 1$, ..., $<e^n,x_1>= 0*1+0*1+\cdots+0*1+1*1+0*1 = 1$. Ainsi $P_F(x_1) = \sum_{i=2}^n e^i = (1,0,\cdots,0,-1)$ **(2pts)**.
On sait que $P_{F^\perp}(x_1) = x_1 - P_F(x_1)$ donc $P_{F^\perp}(x_1) = (0,\cdots,0,1)$ **(1pt)**. De plus $\|P_{F^\perp}(x_1)\| = 1$, donc $e^1 = (0,\cdots,0,1)$ **(1pt)**.

□