Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, février 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(10 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère l'application $< \cdot, \cdot >_a$ telle que pour tout x, $y \in E$, avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$< x, y >_a = 2x_1y_1 + x_2y_2 + (a^2 - a + 2)x_3y_3 - a(x_2y_3 + y_2x_3) + (2 - a)(x_1y_3 + x_3y_1).$$

   (a) Soit $u = (0, 1, 0)$ et $v = (-\frac{1}{2}, a, 1)$. Calculer $< u, v >_a$, $< u, u >_a$ et $< v, v >_a$.

   (b) Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $< x, x >_a = ax_1^2 + (x_2 - ax_3)^2 + (2 - a)(x_1 + x_3)^2$. En déduire que $< \cdot, \cdot >_a$ est un produit scalaire si et seulement si $0 < a < 2$.

   (c) Pour $0 < a < 2$, déterminer $\{u, v\}^\perp$ puis $\{u\}^\perp$.

   (d) Déterminer une base orthonormale e de E. Déterminer x le projeté orthogonal de $(0, 0, 1)$ sur $\{u, v\}^\perp$. Quelles sont les coordonnées de x dans la base e?

2. **(Sur 14 points)** Soit $F = \mathcal{C}^2([-1, 1])$, l'ensemble des fonctions continues, dérivables 2 fois et de dérivées secondes continues sur $[-1, 1]$. On considère le produit scalaire sur F tel que pour $f, g \in F$

$$< f, g > = f(-1)g(-1) + f(1)g(1) + \int_{-1}^{1} |x| f''(x)g''(x)dx.$$

   (a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire (on pourra utiliser le résultat suivant: pour toute fonction $h : [-1, 1] \to \mathbf{R}_+$ continue sur $[-1, 1]$, $\int_{-1}^{1} h(t)dt = 0 \iff h \equiv 0$). Pour $f \in F$, on note $\|f\|^2 = < f, f >$.

   (b) Déterminer, en justifiant, $F^\perp$.

   (c) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que pour $x \in [-1, 1]$, $f_n = x^n$ (et $f_0 \equiv 1$). Montrer que (f_n) est une suite de F. Que peut-on dire de la dimension de F?

   (d) Déterminer $\|f_0\|$, $< f_0, f_1 >$ et $\|f_1\|$. Plus généralement, déterminer $\|f_n\|$.

   (e) Soit $G = \{f \in F,\ f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in [-1, 1]\}$. Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de F.

   (f) Expliquer pourquoi pour $f \in F$, $\min_{x \in [-1,1]} \{f(x)\}$ existe. Montrer que pour $f \in F$, $f - \min_{x \in [-1,1]} \{f(x)\} \in G$.

   (g) On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G) = F$. En déduire que $G^\perp = \{0_F\}$.