Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Algèbre S4

Correction du Contrôle continu n°1, février 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(10 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$. Pour $a \in \mathbf{R}$, on considère l'application $< \cdot, \cdot >_a$ telle que pour tout $x,\, y \in E$, avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$< x, y >_a = 2x_1y_1 + x_2y_2 + (a^2 - a + 2)x_3y_3 - a(x_2y_3 + y_2x_3) + (2 - a)(x_1y_3 + x_3y_1).$$

   (a) Soit $u = (0, 1, 0)$ et $v = (-\frac{1}{2}, a, 1)$. Calculer $< u, v >_a$, $< u, u >_a$ et $< v, v >_a$.

   (b) Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, $< x, x >_a = ax_1^2 + (x_2 - ax_3)^2 + (2 - a)(x_1 + x_3)^2$. En déduire que $< \cdot, \cdot >_a$ est un produit scalaire si et seulement si $0 < a < 2$.

   (c) Pour $0 < a < 2$, déterminer $\{u, v\}^\perp$ puis $\{u\}^\perp$.

   (d) Déterminer une base orthonormale e de E. Déterminer x le projeté orthogonal de $(0, 0, 1)$ sur $\{u, v\}^\perp$. Quelles sont les coordonnées de x dans la base e?

Proof. (a) On a $< u, v >_a = a - a = 0$, $< u, u >_a = 1$ et $< v, v >_a = \frac{1}{2}$ **(1pt)**.
(b) On a $< x, x >_a = 2x_1^2 + x_2^2 + (a^2 - a + 2)x_3^2 - 2ax_2x_3 + 2(2 - a)x_1x_3 = ax_1^2 + (x_2 - ax_3)^2 + (2 - a)(x_1 + x_3)^2$ pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E$ **(1pt)**.
Il est clair que $< x, y >_a = < y, x >_a$ et $< x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 >_a = \lambda_1 < x, y_1 >_a + \lambda_2 < x, y_2 >_a$ (puisqu'écrit sous la forme de combinaison linéaire de $x_i y_j$). Il faut maintenant vérifier que $< x, x >_a \geq 0$ ce qui implique que $a \geq 0$ et $(2 - a) \geq 0$, soit $a \in [0, 2]$. Enfin, si $< x, x >_a = 0$ et $a \in]0, 2[$, ceci entraîne $x_1 = 0$, $x_2 = ax_3$ et $x_1 + x_3 = 0$, soit $x = 0_E$. Si $a = 0$ ou $a = 2$, ceci n'est plus vrai **(1.5pts)**.
(c) Comme (u, v) forme une famille orthogonale, c'est une famille libre, donc $\dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = 2$ et ainsi $\dim(\{u, v\}^\perp) = 3 - 2 = 1$. Or $(u, \sqrt{2}\, v)$ forme une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u, v)$. On en déduit que comme $w = (1, 0, 0) \notin \mathrm{Vect}(u, v)$, $w - P_{(u,v)}(w) \in \{u, v\}^\perp$ avec $P_{(u,v)}(w)$ le projeté orthogonal de w sur $\mathrm{Vect}(u, v)$, donc $w' = w - < u, w >_a u - 2 < v, w >_a \in \{u, v\}^\perp$, soit $w' = (1, 0, 0) - 0 \times (0, 1, 0) - 2(1 - a)(-\frac{1}{2}, a, 1)$. On trouve ainsi $w' = (2 - a, 2a(a - 1), 2(a - 1))$ et $\{u, v\}^\perp = \mathrm{Vect}(w')$ **(3pts)**.
Comme (u, v, w') est une famille orthogonale, on en déduit que $\{u\}^\perp = \mathrm{Vect}(v, w')$ **(1pt)**.
(d) Une base orthonormale e de E est donc: $e = (u, \sqrt{2}\, v, w'/\|w'\|_a)$ avec $\|w'\|_a^2 = 2a(2 - a)$ **(0.5pts)**.
On en déduit que comme $\{u, v\}^\perp = \mathrm{Vect}(w')$, $P_{(u,v)^\perp}((0, 0, 1)) = < w', (0, 0, 1) >_a \; w'/\|w'\|_a^2$, donc $x = \frac{1}{2}\, w'$ **(1pt)**.
Dans e, les coordonnées de x sont donc $(0, 0, \frac{1}{2})$ **(1pt)**.

□

2. **(Sur 15 points)** Soit $F = \mathcal{C}^2([-1, 1])$, l'ensemble des fonctions continues, dérivables 2 fois et de dérivées secondes continues sur $[-1, 1]$. On considère le produit scalaire sur F tel que pour $f, g \in F$

$$< f, g > = f(-1)g(-1) + f(1)g(1) + \int_{-1}^{1} |x| f''(x) g''(x) dx.$$

   (a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire (on pourra utiliser le résultat suivant: pour toute fonction $h : [-1, 1] \to \mathbf{R}_+$ continue sur $[-1, 1]$, $\int_{-1}^{1} h(t)dt = 0 \iff h \equiv 0$). Pour $f \in F$, on note $\|f\|^2 = < f, f >$.

   (b) Déterminer, en justifiant, $F^\perp$.

(c) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour $x \in [-1,1]$, $f_n = x^n$ (et $f_0 \equiv 1$). Montrer que (f_n) est une suite de F. Que peut-on dire de la dimension de F?

(d) Déterminer $\|f_0\|$, $< f_0, f_1 >$ et $\|f_1\|$. Plus généralement, déterminer $\|f_n\|$.

(e) Soit $G = \{f \in F,\ f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1,1]\}$. Montrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de F.

(f) Expliquer pourquoi pour $f \in F$, $\min_{x\in[-1,1]} \{f(x)\}$ existe. Montrer que pour $f \in F$, $f - \min_{x\in[-1,1]} \{f(x)\} \in G$.

(g) On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G) = F$. En déduire que $G^\perp = \{0_F\}$.

Proof. (a) Il est clair que $< f,g >=< g,f >$, $< f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 >= \lambda_1 < f, g_1 > + \lambda_2 < f, g_2 >$ et $< f,f > \geq 0$ **(0.5pts)**. Il faut maintenant vérifier que $< f,f >= 0$ implique $f = 0$. D'après la propriété citée, comme $< f,f >= f^2(0) + \int_{-1}^1 |x|(f''(x))^2 dx$, alors $< f,f >= 0$ entraîne $f(1) = f(-1) = 0$ et $|x|(f''(x))^2 = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$. La seconde relation implique que $f''(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,0[\cup]0,1]$ donc sur $[-1,1]$ car f'' est continue, ce qui signifie que f est une fonction polynomiale de degré 1 sur $[-1,1]$. Comme $f(1) = f(-1) = 0$, la seule fonction polynomiale de degré 1 s'annulant 2 fois est la fonction nulle, ce qui signifie que $f = 0_F$. **(2.5pts)**.
(b) Soit $g \in F^\perp$. Cela signifie que $g \in F$ et que pour tout $f \in F$, $< f,g >= 0$. En particulier cela est vrai pour $f = g$, donc $< g,g >= 0$ ce qui entraîne que $g = 0_F$: $F^\perp = \{0_E\}$ **(1pt)**.
(c) Les fonctions f_n sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$: elles appartiennent bien à F **(0.5pts)**. Comme la suite (f_n) est une famille libre (famille de polynômes de degrés croissants) et qu'elle est composée d'une infinité de fonctions, on en déduit que la dimension de F n'est pas finie mais infinie **(1pt)**.
(d) On a $\|f_0\|^2 = 2$, donc $\|f_0\| = 2^{1/2}$, $< f_0, f_1 >= 0$ et $\|f_1\|^2 = 2$, donc $\|f_1\| = 2^{1/2}$ **(1pt)**. Plus généralement, pour $n \geq 1$, on a $\|f_n\|^2 = 2 + 2(n(n-1))^2 \int_0^1 x^{2n-3} dx = 2 + n^2(n-1)$, donc $\|f_n\| = (2 + n^2(n-1))^{-1/2}$ **(1pt)**.
(e) Il est clair que si $g \in G$, avec $g \neq 0_F$, alors $-g \notin G$ donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de F **(1pt)**.
(f) Comme f est continue sur $[-1,1]$, f atteint ses extrema sur cet intervalle et ainsi $\inf_{x\in[-1,1]} f(x) = \min_{x\in[-1,1]} f(x)$ **(0.5pts)**.
On sait que pour tout $t \in [-1,1]$, $f(t) \geq \min_{x\in[-1,1]} f(x)$, donc $f(t) - \min_{x\in[-1,1]} f(x) \geq 0$. De plus $f - \min_{x\in[-1,1]} f(x)$ appartient à F car $f \in F$ (on enlève juste une constante). Ainsi $f - \min_{x\in[-1,1]} f(x) \in G$ **(1pt)**.
(g) Il est clair que comme $G \subset F$, $\mathrm{Vect}(G) \subset F$. Montrons que $F \subset \mathrm{Vect}(G)$. Soit $f \in F$. Alors $f = \big(f - \min_{x\in[-1,1]} f(x)\big) + \min_{x\in[-1,1]} f(x)$. Posons $g_1 = f - \min_{x\in[-1,1]} f(x)$, donc d'après la question précédente $g_1 \in G$. Ainsi, si $\min_{x\in[-1,1]} f(x) \geq 0$, $f = g_1 + g_2$ avec $g_2 = \min_{x\in[-1,1]} f(x) \in G$, et si $\min_{x\in[-1,1]} f(x) < 0$, $f = g_1 - g_2$ avec $g_2 = -\min_{x\in[-1,1]} f(x) \in G$. Dans tous les cas f s'écrit comme une combinaison linéaire finie de fonctions de G **(3pts)**.
Soit $h \in G^\perp$. Cela signifie que $h \in F$, donc $h = g_1 + g_2$ suivant le découpage précédent, et $< h,g >= 0$ pour toute fonction $g \in G$. Cela est donc vrai pour $g = g_1$ et $g = g_2$ et ainsi $< h, g_1 >=< h, g_2 >= 0$. On en déduit ainsi que $< h, g_1 + g_2 >= 0$, soit $< h,h >= 0$ et d'après la propriété 4 du produit scalaire, $h = 0_F$ **(2.5pts)**. □