Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, février 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-1,0)$ et $u_3 = (1,-2,-1)$. Pour $x = (x_1,x_2,x_3) \in E$, on note $\|x\| = ((x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2)^{1/2}$

   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est la norme sur E associée à un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ que l'on précisera (on montrera également que c'est bien un produit scalaire) **(2.5 pts)**. Calculer $\|u_1\|$ **(0.5pts)**.

   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Déterminer une base de F et en déduire la dimension de F **(1.5pts)**.

   (c) Déterminer une base orthonormale de F **(1.5pts)**. En déduire pour $x = (x_1,x_2,x_3)$, la projection orthogonale de x sur F notée $P_F(x)$ en fonction de (x_1,x_2,x_3) **(1.5pts)**.

   (d) Que vaut $P_F(2u_1)$ et $P_F((1,0,0))$ **(1pt)**?

   (e) Quelle est la dimension de $F^\perp$ **(0.5pts)**? Démontrer que $(1,0,0)-P_F((1,0,0))$ est un vecteur de $F^\perp$ **(1pt)**. En déduire une base orthonormale de $F^\perp$ **(1pt)**.

2. **(15 points)** Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \exists C > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leq \dfrac{C}{n+1}\}$, où $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles. On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour tout u, $v \in E$ avec $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$< u, v > = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + u_{n+1})(v_n + v_{n+1}).$$

   (a) Montrer que la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $y_0 = 1$ et $y_n = 0$ si $n \in \mathbf{N}^*$ appartient à E **(1pt)**. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ n'appartient pas à E **(2pts)**.

   (b) Montrer que E est un espace vectoriel **(1.5pts)**.

   (c) Montrer que pour tout u, $v \in E$, $< u, v >$ existe **(1.5pts)**.

   (d) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E **(2.5pts)**.

   (e) Pour $i \in \mathbf{N}$, soit la suite $w^{(i)} = (w^{(i)}_{n\in\mathbf{N}})$ telle que $w^{(i)}_n = (-1)^n$, pour $n \leq i+1$ et $w^{(i)}_n = 0$ si $n \geq i+2$. Montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $(w^{(i)}_{n\in\mathbf{N}}) \in E$ **(1pt)**. Montrer que la famille $(w^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(2pts)**. En déduire une famille orthonormale de E **(1pt)**.

   (f) Soit $F = \mathrm{Vect}((w^{(i)})_{i\in\mathbf{N}})$. Démontrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ est telle que $u \in F^\perp$ alors $u_{i+1} + u_{i+2} = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ **(1pt)**. En déduire que $F^\perp = \mathrm{Vect}(y)$ **(1.5pts)**.