Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Algèbre S4

Correction du Contrôle continu n°1, février 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 11 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-1,0)$ et $u_3 = (1,-2,-1)$. Pour $x = (x_1,x_2,x_3) \in E$, on note $\|x\| = ((x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2)^{1/2}$
   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est la norme sur E associée à un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ que l'on précisera (on montrera également que c'est bien un produit scalaire) **(2.5 pts)**. Calculer $\|u_1\|$ **(0.5pts)**.
   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$. Déterminer une base de F et en déduire la dimension de F **(1.5pts)**.
   (c) Déterminer une base orthonormale de F **(1.5pts)**. En déduire pour $x = (x_1,x_2,x_3)$, la projection orthogonale de x sur F notée $P_F(x)$ en fonction de (x_1,x_2,x_3) **(1.5pts)**.
   (d) Que vaut $P_F(2u_1)$ et $P_F((1,0,0))$ **(1pt)**?
   (e) Quelle est la dimension de $F^\perp$ **(0.5pts)**? Démontrer que $(1,0,0) - P_F((1,0,0))$ est un vecteur de $F^\perp$ **(1pt)**. En déduire une base orthonormale de $F^\perp$ **(1pt)**.

Proof. (a) On a facilement pour tout $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $y = (y_1,y_2,y_3)$ dans E, $<x,y> = (x_1-x_2)(y_1-y_2) + (x_2-x_3)(y_2-y_3) + x_3y_3$. La symétrie, la bilinéarité et la positivité de $<\cdot,\cdot>$ se montrent aisément. Il reste à montrer que si $\|x\| = 0$ alors $x = 0_E$. Or $\|x\| = 0$ avec $x = (x_1,x_2,x_3)$ équivaut à $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$ et $x_3 = 0$, soit $x = 0_E$. Donc $<\cdot,\cdot>$ est bien un produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme associée.
On a $\|u_1\|^2 = (1-1)^2 + (1-1)^2 + 1^2 = 1$, donc $\|u_1\| = 1$.

(b) On voit facilement que u_2 et u_3 sont libres (grâce au zéro dans la coordonnée de u_2) et $u_1 = u_2 - u_3$. Donc $F = \mathrm{Vect}\big(u_1,u_2\big)$, et (u_1,u_2) base de F, dont la dimension est 2.

(c) On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On part de la base (u_1,u_2). Alors $u_1' = u_1/\|u_1\| = u_1$ et $u_2' = (u_2 - <u_1,u_2>u_1)/\|u_2 - <u_1,u_2>u_1\|$. Mais $<u_1,u_2> = 0$ et $\|u_2\|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$, donc $u_2' = u_2/\sqrt{10}$.
On sait que $P_F(x) = <x,u_1'>u_1' + <x,u_2'>u_2' = <x,u_1>u_1 + <x,u_2>u_2/10$ donc on a $P_F(x) = x_3(1,1,1) + (3(x_1-x_2) - (x_2-x_3))(2,-1,0)/10 = (x_3,x_3,x_3) + (3x_1 - 4x_2 + x_3)(2,-1,0)/10 = \frac{1}{10}(6x_1 - 8x_2 + 12x_3, -3x_1 + 4x_2 + 9x_3, 10x_3)$.

(d) Comme $2u_1 \in F$, on a $P_F(2u_1) = 2u_1$ et $P_F((1,0,0)) = (3/5, -3/10, 0)$.

(e) Comme $\dim F = 2$ et $\dim E = 3$, alors $\dim F^\perp = 3 - 2 = 1$. Pour tout $x \in E$, $x - P_F(x) = P_{F^\perp}(x)$ donc $x - P_F(x) \in F^\perp$ et ainsi $(1,0,0) - P_F((1,0,0)) \in F^\perp$.
On a $(1,0,0) - P_F((1,0,0)) = (2/5, 3/10, 0)$. Donc $(4,3,0)$ est une base de $F^\perp$ et $(4,3,0)/\|(4,3,0)\| = (4,3,0)/\sqrt{10}$ est une base orthonormale de $F^\perp$.

□

2. **(15 points)** Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ \exists C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leq \dfrac{C}{n+1}\}$, où $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles. On considère l'application $<\cdot,\cdot>$ telle que pour tout $u, v \in E$ avec $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$,

$$<u,v> = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n + u_{n+1})(v_n + v_{n+1}).$$

(a) Montrer que la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $y_0 = 1$ et $y_n = 0$ si $n \in \mathbf{N}^*$ appartient à E **(1pt)**. Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ n'appartient pas à E **(2pts)**.

(b) Montrer que E est un espace vectoriel **(1.5pts)**.

(c) Montrer que pour tout u, $v \in E$, $< u, v >$ existe **(1.5pts)**.

(d) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E **(2.5pts)**.

(e) Pour $i \in \mathbf{N}$, soit la suite $w^{(i)} = (w^{(i)}_{n\in\mathbf{N}})$ telle que $w^{(i)}_n = (-1)^n$, pour $n \le i+1$ et $w^{(i)}_n = 0$ si $n \ge i+2$. Montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $(w^{(i)}_{n\in\mathbf{N}}) \in E$ **(1pt)**. Montrer que la famille $(w^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de E **(2pts)**. En déduire une famille orthonormale de E **(1pt)**.

(f) Soit $F = \mathrm{Vect}((w^{(i)})_{i\in\mathbf{N}})$. Démontrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ est telle que $u \in F^\perp$ alors $u_{i+1} + u_{i+2} = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ **(1pt)**. En déduire que $F^\perp = \mathrm{Vect}(y)$ **(1.5pts)**.

Proof. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|y_n| \le 1/(n+1)$ donc $y \in E$ avec $C = 1$.
Supposons que $u \in E$. Alors il existe $C > 0$ tel que $|u_n| \le C/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors pour $n \ge C$, on a $|u_n| \le C/(C+1) < 1$. Ceci n'est pas possible car pour $n \ge C$, $u_n = 1$. Donc $u \notin E$.

(b) Il est clair que la suite toujours nulle appartient à E. Par ailleurs, si (u_n) et (v_n) appartiennent à E, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $C_u > 0$ et $C_v > 0$ tels que $|u_n| \le C_u/(n+1)$ et $|v_n| \le C_v/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$, on a $|\lambda u_n + \mu v_n| \le |\lambda| C_u/(n+1) + |\mu| C_v/(n+1) \le C'/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $C' = |\lambda| C_u + |\mu| C_v$. Ainsi la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ appartient à E et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, donc est un espace vectoriel.

(c) Soit (u_n) et (v_n) appartenant à E, telles pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $C_u > 0$ et $C_v > 0$ tels que $|u_n| \le C_u/(n+1)$ et $|v_n| \le C_v/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et ainsi $|u_n + u_{n+1}| \le 2C_u/(n+1)$ et $|v_n + v_{n+1}| \le 2C_v/(n+1)$. Donc il existe $C > 0$ tel que $|u_n + u_{n+1}||v_n + v_{n+1}| \le C/(n+1)^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Mais $\sum_{n=0}^\infty C/(n+1)^2$ converge (série de Riemann). Ainsi la série $\sum_{n=0}^\infty (u_n + u_{n+1})(v_n + v_{n+1})$ est absolument convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, donc convergente et $< \cdot, \cdot >$ existe.

(d) La symétrie, la bilinéarité et la positivité de $< \cdot, \cdot >$ ne posent pas de problème. Pour le quatrième point, soit $u = (u_n)$ telle que $< u, u >= 0$. Alors $\sum_{n=0}^\infty (u_n + u_{n+1})^2 = 0$ soit $u_n + u_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Donc $u_n = (-1)^n u_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Mais si $u_0 \ne 0$, alors $u \notin E$ puisque si $|u_n| \le C/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors pour $n \ge C/|u_0|$, on a $|u_n| < |u_0|$ ce qui n'est pas possible. Donc $u_0 = 0$ et $(u_n) = 0_E$. Donc $< u, u >= 0$ ssi $u = 0_E$.

(e) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il est facile de voir que si $C = i+2$, alors $|w^{(i)}_n| \le C/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{N}$ avec $j > i$, alors $< w^{(i)}, w^{(j)} >= \sum_{k=0}^{j} (w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1})(w^{(j)}_k + w^{(j)}_{k+1})$ car $w^i_{k+1} = 0$ pour $k \ge j+1$. Mais il est clair que pour tout $k \le i$, $(w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1}) = (-1)^k + (-1)^{k+1} = 0$ et pour tout $i+2 \le k \le j$, $(w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1}) = 0 + 0 = 0$. Il reste le cas où $k = i+1$. Alors $(w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1})(w^{(j)}_k + w^{(j)}_{k+1}) = (-1)^{i+1}(w^{(j)}_{i+1} + w^{(j)}_{i+2}) = 0$ car $(w^{(j)}_{i+1} + w^{(j)}_{i+2}) = (-1)^{i+1} + (-1)^{i+2} = 0$ car $j \ge i+1$. Donc $< w^{(i)}, w^{(j)} >= 0$: la famille est bien orthogonale.
Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\|w^{(i)}\|^2 = \sum_{k=0}^{i+1} (w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1})^2 = \sum_{k=0}^{i} ((-1)^k + (-1)^{k+1})^2 + 1 = 1$: la famille des $(w^{(i)})_i$ est bien orthonormale.

(f) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $< u, w^{(i)} >= \sum_{k=0}^{i+1} (u_k + u_{k+1})(w^{(i)}_k + w^{(i)}_{k+1}) = 0 + (-1)^{i+1}(u_{i+1} + u_{i+2})$. Or si $u \in F^\perp$ alors $< u, w^{(i)} >= 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$, et ainsi $u_{i+1} + u_{i+2} = 0$.
Si $u \in F^\perp$, alors $u_i = (-1)^{i+1} u_1$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, et on a déjà vu que cela entraîne que $u_1 = 0$ et donc $u_i = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$. Il reste u_0 que l'on peut choisir comme l'on veut, soit $u = u_0 \times y$ donc $F^\perp$ est engendré par y.

□