Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 10 points)** Soit $E = \mathbf{R}^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ appartenant à E, on note $< x, y >= \frac{1}{n}\, x\, {}^t y$, où ${}^t A$ désigne la matrice transposée d'une matrice A quelconque. Enfin, on note $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1) \in E$.

   (a) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire **(1 pt)**. Calculer $\|\mathbf{1}\|$, où $\| \cdot \|$ désigne la norme associée à $< \cdot, \cdot >$ **(0.5pts)**.

   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$. Déterminer une base orthonormale de F **(1pt)** et en déduire l'expression de $P_F(x)$ en fonction de $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, où P_F est la projection orthogonale sur F **(1.5pts)**.

   (c) Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$ fixé, et pour $m \in \mathbf{R}$, on définit $f(m) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}$. Montrer que $f(m) = \|x - m\mathbf{1}\|$ **(1pt)**. En déduire qu'il existe un unique $\widehat{m} \in \mathbf{R}$, que l'on précisera, tel que $f(\widehat{m}) = \min_{m \in \mathbf{R}} f(m)$ **(2pts)**.

   (d) Montrer que $f^2(\widehat{m}) = \|x\|^2 - \|P_F(x)\|^2$ **(2pts)**, puis exprimer $f^2(\widehat{m})$ en fonction de $(x_1, \cdots, x_n)$ **(1pt)**.

2. **(13 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 3, muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de sa norme $\| \cdot \|$ associée.

   (a) Soit $F = \{x \in E,\ \|x\| = 1\}$. Montrer que F n'est pas l'ensemble vide **(1pt)**, puis montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E **(1pt)**. Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$ **(2.5pts)**, puis déterminer $(F^\perp)^\perp$ **(0.5pts)**.

   (b) On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie de base $e = (e_1, \cdots, e_n)$. Montrer que $A^\perp = \{x \in E,\ < x, e_i >= 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n\}$ **(3pts)**.

   (c) Soit $x_0 \in E$ et $y_0 \in E$ tels que $\|x_0\| > 0$, $\|y_0\| > 0$ et $< x_0, y_0 >= 0$. Soit $Q = \{x \in E,\ < x, x_0 >= 0 \text{ et } < x, y_0 >= 0\}$. Montrer que Q est un sous-espace vectoriel de E **(1pt)**. Montrer qu'il existe $P \in E$ sous-espace vectoriel de E de dimension 2 tel que $E = Q \oplus P$ et $P^\perp = Q$ **(4pts)**.