Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2014-2015$

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mars 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 10 points)** Soit $E=\mathbf{R}^n$ avec $n\in\mathbf{N}^*$. Pour $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)$ appartenant à E, on note $<x,y>=\frac{1}{n}\,x\,{}^ty$, où ${}^tA$ désigne la matrice transposée d'une matrice A quelconque. Enfin, on note $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)\in E$.

   (a) Montrer que $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire **(1 pt)**. Calculer $\|\mathbf{1}\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée à $<\cdot,\cdot>$ **(0.5pts)**.

   (b) Soit $F=\mathrm{Vect}(\mathbf{1})$. Déterminer une base orthonormale de F **(1pt)** et en déduire l'expression de $P_F(x)$ en fonction de $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E$, où P_F est la projection orthogonale sur F **(1.5pts)**.

   (c) Soit $x=(x_1,\cdots,x_n)\in E$ fixé, et pour $m\in\mathbf{R}$, on définit $f(m)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-m)^2}$. Montrer que $f(m)=\|x-m\mathbf{1}\|$ **(1pt)**. En déduire qu'il existe un unique $\widehat{m}\in\mathbf{R}$, que l'on précisera, tel que $f(\widehat{m})=\min_{m\in\mathbf{R}}f(m)$ **(2pts)**.

   (d) Montrer que $f^2(\widehat{m})=\|x\|^2-\|P_F(x)\|^2$ **(2pts)**, puis exprimer $f^2(\widehat{m})$ en fonction de $(x_1,\cdots,x_n)$ **(1pt)**.

Proof. (a) Au final, $<\cdot,\cdot>$ est égal à $1/n$ fois le produit scalaire euclidien classique sur $\mathbf{R}^n$. On a $\|\mathbf{1}\|=1$.

(b) Il est clair que $(\mathbf{1})$ est une base orthonormale de F car $\dim F=1$ et $\|\mathbf{1}\|=1$. On a d'après le cours $P_F(x)=<x,\mathbf{1}>\mathbf{1}$ donc $P_F(x)=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\mathbf{1}$.

(c) $(x-m\mathbf{1})=(x_1-m,\cdots,x_n-m)$ et donc $\|x-m\mathbf{1}\|^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-m)^2$, d'où le résultat. On a donc $\inf_{m\in\mathbf{R}}f(m)=\inf_{m\in\mathbf{R}}\|x-m\mathbf{1}\|=\inf_{y\in F}\|x-y\|$. D'après le cours, on sait alors que $\inf_{y\in F}\|x-y\|=\min_{m\in\mathbf{R}}f(m)=\|x-P_F(x)\|$ et donc $\widehat{m}\mathbf{1}=P_F(x)$, soit $\widehat{m}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$.

(d) On sait que $x-P_F(x)=P_{F^\perp}(x)$, donc d'après Pythagore, $\|x-P_F(x)\|^2+\|P_F(x)\|^2=\|x\|^2$, doù le résultat. On obtient ainsi que $f^2(\widehat{m})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

□

2. **(13 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 3, muni du produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ et de sa norme $\|\cdot\|$ associée.

   (a) Soit $F=\{x\in E,\ \|x\|=1\}$. Montrer que F n'est pas l'ensemble vide **(1pt)**, puis montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E **(1pt)**. Montrer que $F^\perp=\{0_E\}$ **(2.5pts)**, puis déterminer $(F^\perp)^\perp$ **(0.5pts)**.

   (b) On suppose que A est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie de base $e=(e_1,\cdots,e_n)$. Montrer que $A^\perp=\{x\in E,\ <x,e_i>=0 \text{ pour tout } i=1,\cdots,n\}$ **(3pts)**.

   (c) Soit $x_0\in E$ et $y_0\in E$ tels que $\|x_0\|>0$, $\|y_0\|>0$ et $<x_0,y_0>=0$. Soit $Q=\{x\in E,\ <x,x_0>=0 \text{ et } <x,y_0>=0\}$. Montrer que Q est un sous-espace vectoriel de E **(1pt)**. Montrer qu'il existe $P\in E$ sous-espace vectoriel de E de dimension 2 tel que $E=Q\oplus P$ et $P^\perp=Q$ **(4pts)**.

Proof. (a) Puisque E n'est pas restreint au vecteur nul, il existe donc un vecteur u non nul dans E, et ainsi $u/\|u\| \in F$: F n'est pas l'ensemble vide.
F n'est pas un sev de E car sinon, pour $u \in F$ alors $2u \in F$; mais $\|2u\| = 2$ puisque $\|u\| = 1$, donc $2u \notin E$.
Soit $y \in F^{\perp}$. Supposons que $y \neq 0_E$. Alors $< x, y >= 0$ pour tout $x \in F$. Mais comme $\|y\| > 0$, on a $y/\|y\| \in F$, donc $< y/\|y\|, y >= 0$ soit $\|y\| = 0$ donc $y = 0_E$.
On a $(F^{\perp})^{\perp} = 0_E^{\perp} = E$ puisque pour tout $x \in E$, $< x, 0_E >= 0$.

(b) Il est clair que si $x \in A^{\perp}$ alors $< x, a >= 0$ pour tout $a \in A$, donc comme $e_i \in A$, alors $< x, e_i >= 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Donc $A^{\perp} \subset \big\{x \in E,\ < x, e_i >= 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n\big\}$. De plus, si $< x, e_i >= 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, alors comme tout $a \in A$ s'écrit sous la forme $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, on a $< x, a >= 0$ pour tout $a \in A$: $\big\{x \in E,\ < x, e_i >= 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, n\big\} \subset A^{\perp}$ ce qui conclue la preuve.

(c) On a bien-sûr $0_E \in Q$. De plus, si $x, y \in Q$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, alors $< \lambda x + \mu y, x_0 >= \lambda < x, x_0 > + \mu < y, x_0 >= 0$ car $x, y \in Q$. De même, $< \lambda x + \mu y, y_0 >= 0$. Donc $\lambda x + \mu y \in Q$.
Soit $P = Vect(x_0, y_0)$. Il est clair que $x_0 \neq 0_E$ et $y_0 \neq 0_E$. De plus $< x_0, y_0 >= 0$, donc x_0 et y_0 sont orthogonaux donc non colinéaires. Ainsi $\dim(P) = 2$ et $(x_0/\|x_0\|, y_0/\|y_0\|)$ base orthonormale de P. Pour $x \in E$, on a $x = P_P(x) + (x - P_P(x))$ où $P_P(x) = \frac{<x,x_0>}{\|x_0\|^2} x_0 + \frac{<x,y_0>}{\|y_0\|^2} y_0$ est la projection orthogonale de x sur P. Mais $(x - P_P(x)) \in Q$ car $< x - P_P(x), x_0 >=< x - P_P(x), y_0 >= 0$. Donc $E = P + Q$. De plus comme par définition et en utilisant la question précédente, $Q = P^{\perp}$, alors $P \cap Q = \{0_E\}$ soit $E = P \oplus Q$.

$\square$