Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 − 2010

Algèbre S4

Contrôle continu n°1, mai 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 7 points)** Soit f la fonction 2π-périodique telle que pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$.
   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. En déduire les éventuels points de discontinuité ou de non-dérivabilité de f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que,
   $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\,x) \quad \text{pour} \quad x \in [-\pi, \pi].$$
   (c) En déduire la valeur explicite de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (d) Déduire également (en justifiant) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

2. **(Sur 16 points)** Soit E l'ensemble
   $$E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ u_n \in \mathbf{R} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe}\}.$$
   (a) Montrer que E est bien un espace vectoriel.
   (b) Soit $\phi : u \in E \mapsto \phi(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que ϕ est une forme linéaire sur E.
   (c) Quelle est la dimension d'un sous-espace vectoriel F tel que $E = \ker\phi \oplus F$? Déterminer explicitement un sous-espace vectoriel F vérifiant cette propriété.
   (d) Soit la famille de suite $(u^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ telle que pour $i \in \mathbf{N}$, $u^{(i)} = (u_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ avec $u_i^{(i)} = 1$ et $u_n^{(i)} = 0$ si $n \neq i$. Montrer que $(u^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\ker\phi$. En déduire que $\dim\ker\phi = \infty$.
   (e) Pour $(u, v) \in E^2$, soit
   $$< u, v >= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k v_k}{(k+1)^2}.$$
   Montrer que $< u, v >$ existe pour tout $(u, v) \in E^2$. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
   (f) En utilisant la famille de suite $(u^{(i)})$ montrer qu'il n'existe pas une suite $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $u \in E$, $\phi(u) =< u, w >$.