Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2009 – 2010

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°2, mai 2010

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 7 points)** Soit f la fonction 2π-périodique telle que pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$.
   (a) Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. En déduire les éventuels points de discontinuité ou de non-dérivabilité de f.
   (b) Calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que,
   $$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\,x) \quad \text{pour} \quad x \in [-\pi, \pi].$$
   (c) En déduire la valeur explicite de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (d) Déduire également (en justifiant) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Proof. (a) Graphe **[0.5pts]**. f est paire et continue sur $\mathbf{R}$ **[0.5pts]**. La fonction n'est pas dérivable en π (modulo 2π) car $f'(\pi^-) = 2\pi$ et $f'(\pi^+) = f(-\pi^+) = -2\pi$ **[1pt]**.
(b) Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ **[0.5pts]**. On a par double intégration par parties pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\Big[\frac{\sin(nx)}{n}x^2\Big]_0^{\pi} - 2\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(2\frac{1}{n}\Big[\frac{\cos(nx)}{n}x\Big]_0^{\pi} - 2\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\Big) \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{2\pi}{n}\frac{\cos(n\pi)}{n} - 2\frac{1}{n^2}\Big[\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi}\Big) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \textbf{[1.5pts]}. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$ **[0.5pts]**. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. On peut donc appliquer le Théorème de Dirichlet et on en déduit que f est égale à sa série de Fourier, donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\,x) \quad \text{pour} \quad x \in [-\pi, \pi] \quad \textbf{[0.5pts]}.$$

(c) En prenant $x = \pi$, on obtient que $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ **[0.5pts]**.

En prenant $x = 0$, on obtient que $f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ **[0.5pts]**.

(d) En utilisant le Théorème de Bessel (possible car f est continue sur $\mathbf{R}$), on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5} = \frac{1}{4}\Big(\frac{2}{3}\pi^2\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\Big)\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$ **[1pt]**.

□

2. **(Sur 16 points)** Soit E l'ensemble

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}},\ u_n \in \mathbf{R} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et } \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe}\}.$$

   (a) Montrer que E est bien un espace vectoriel.

   (b) Soit $\phi:\ u \in E \mapsto \phi(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que ϕ est une forme linéaire sur E.

   (c) Quelle est la dimension d'un sous-espace vectoriel F tel que $E = \ker\phi \oplus F$? Déterminer explicitement un sous-espace vectoriel F vérifiant cette propriété.

   (d) Soit la famille de suite $(u^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ telle que pour $i \in \mathbf{N}$, $u^{(i)} = (u_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ avec $u_i^{(i)} = 1$ et $u_n^{(i)} = 0$ si $n \neq i$. Montrer que $(u^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\ker\phi$. En déduire que $\dim\ker\phi = \infty$.

   (e) Pour $(u,v) \in E^2$, soit

$$< u, v >= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k v_k}{(k+1)^2}.$$

   Montrer que $< u, v >$ existe pour tout $(u,v) \in E^2$. Montrer que $< \cdot,\cdot >$ est un produit scalaire sur E.

   (f) En utilisant la famille de suite $(u^{(i)})$ montrer qu'il n'existe pas une suite $w = (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $u \in E$, $\phi(u) =< u, w >$.

Proof. (a) Soit A l'ensemble des suites numériques. On sait que A est un espace vectoriel. On peut montrer que E est un sous-espace vectoriel de A: en effet, la suite nulle appartient à E (elle admet bien une limite qui est 0) et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de E, et si $\lambda \in R$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n + \lambda v_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lambda \lim_{n\to\infty} v_n$ donc $(u_n)_n + \lambda(v_n)_n \in E$ [**1.5pts**].
(b) ϕ est à valeurs dans $\mathbf{R}$. De plus, si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de E, et si $\lambda \in R$, alors $\phi((u_n + \lambda u_n)_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lambda v_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lambda \lim_{n\to\infty} v_n = \phi((u_n)_n) + \lambda\phi((v_n)_n)$. Donc ϕ est bien une forme linéaire sur E [**1pts**].
(c) D'après le cours on sait que F existe [**0.5pts**] et $\dim F = 1$ car ϕ est une forme linéaire non nulle [**0.5pts**]. On peut toujours écrire que pour $(u_n)_n \in E$, $(u_n)_n = (v_n) + (w_n)$ où $v_n = u_n - \lim_{n\to\infty} u_n$ et $w_n = \lim_{n\to\infty} u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or $(v_n)_n \in \ker\phi$ car $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ et $(w_n)_n \in F$, où F est le sous-espace vectoriel de E constitué par les suites constantes. Donc $E = \ker\phi + F$. De plus si $(u_n)_n \in \ker\phi \cap F$, alors $(u_n)_n$ est une suite qui admet pour limite 0 et qui est constante: $(u_n)_n$ est donc la suite nulle. Donc $(u_n)_n \in \ker\phi \cap F = \{0_E\}$ et $E = \ker\phi \oplus F$ [**2.5pts**].
(d) En premier lieu, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} u_n^{(i)} = 0$ puisque $U_n^{(i)} = 0$ pour $n > i$. Aussi pour tout $i \in \mathbf{N}$, la suite $(u^{(i)})$ appartient à $\ker\phi$ [**1pt**]. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k \in \mathbf{N}^k$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, alors $\sum_{j=1}^k \lambda_j\, u^{(i_j)} = 0$ entraîne que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j\, u_n^{(i_j)} = 0$. Or pour tout $j \in \{1,\ldots,k\}$, en choisissant $n = i_j$, alors la dernière égalité devient $\lambda_j = 0$. Ce qui prouve que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{1,\ldots,k\}$ et donc que la famille $(u^{(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est libre [**2pts**].
Il est bien clair que la famille libre $(u^{(i)})$ est une famille infinie de $\ker\phi$, donc $\dim\ker\phi = \infty$ [**0.5pts**].
(e) Soit u et v deux suites de E. Comme leurs limites existent et sont finies on en déduit qu'il existe M_u et M_v deux réels positifs tels que $|u_n| \le M_u$ et $|v_n| \le M_v$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Aussi pour toute suite u et v a-t-on $|< u, v >| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_k v_k|}{(k+1)^2} \le M_u M_v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \le M_u M_v \frac{\pi^2}{6} < \infty$: $< u, v >$ est donc une série absolument convergente, donc une série convergente: $< u, v >$ existe [**2.5pts**].
Pour montrer que $< \cdot,\cdot >$ est un produit scalaire, on montre que $< u, v >=< v, u >$ (évident), que $< u, \lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} >= \lambda_1 < u, v^{(1)} > + \lambda_2 < u, v^{(2)} >$ (en utilisant l'écriture sous forme de série), que $< u, u >\ge 0$ (évident) et enfin que $< u, u >= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k^2}{(k+1)^2} = 0$ entraîne $\frac{u_k^2}{(k+1)^2} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit $u_k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, donc $u = 0$ [**2pts**].
(f) Si on suppose qu'une suite w existe telle que $\phi(u) =< u, w >$ pour toute suite $u \in E$, alors cette propriété devra être vérifiée par les $u^{(i)}$. Or $< u^{(i)}, w >= \frac{w_i}{(i+1)^2}$ et comme $\phi(u^{(i)}) = 0$, ceci entraîne que $w_i = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$: aussi la suite w doit-elle être la suite nulle. Mais si u une suite de E admettant une limite ℓ non nulle, alors $\phi(u) = \ell$ alors que $< u, w >= 0$. Il n'est donc pas possible qu'il existe une suite w telle que $\phi(u) =< u, w >$ pour toute suite $u \in E$ [**3pts**]. □