Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, avril 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 16 points)** Soit E l'ensemble des fonctions f continues et bornées sur $\mathbf{R}_+$ telles que $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$. Soit $(f_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ la famille de fonctions telles que pour $j \in \mathbf{N}^*$, $f_j(x) = e^{-jx}$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que la famille $(f_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est une famille libre de E (on pourra se ramener aux polynômes).
   (c) Soit $N \in \mathbf{N}^*$ fixé. Rappeler la définition de F_N le sous-espace vectoriel engendré par $(f_j)_{1\le j\le N}$. Déterminer une base de F_N.
   (d) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ sur E telle que pour $(f, g) \in E^2$, $< f, g >= \int_0^\infty f(t)g(t)dt$. Montrer que $< f, g >$ existe pour toutes fonctions f et g de E. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
   (e) Pour $j \in \mathbf{N}^*$, soit l'application $u_j :\ f \in F_N \mapsto \int_0^\infty e^{-jt} f(t)dt$. Montrer que u_j est une forme linéaire sur F_N. Calculer $u_j(f_k)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.
   (f) Montrer que pour tout $1 \le j \le N$, une base de $\ker u_j$ est la famille $(\phi_k)_{1\le k\le N-1}$ avec $\phi_k = (j + k)f_k - (j + k + 1)f_{k+1}$.
   (g) Montrer que $(u_j)_{1\le j\le N}$ est une famille libre de F_N^*.
   (h) Déterminer la base duale de $(f_k)_{1\le k\le N}$.

2. **(Sur 10 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$, le produit scalaire usuel sur E tel que pour $(x_1, x_2, x_3) \in E$ et $(y_1, y_2, y_3) \in E$, $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ et soit (i, j, k) la base canonique de E.
   (a) Soit $A = \{(1, 2, -1), (-2, 0, 2)\}$. Déterminer $A^\perp$ ainsi qu'une base orthonormale e de $A^\perp$. Compléter e pour obtenir une base f orthonormale de E.
   (b) Soit p le projecteur orthogonal sur $A^\perp$. Déterminer la matrice de p dans (i, j, k), puis dans f. Déterminer l'application adjointe de p. En déduire également les valeurs propres de p. p est-elle diagonalisable?
   (c) Soit l'application s telle que pour tout $x \in E$, $s(x) = 2p(x) - x$. Montrer que s est une application linéaire et que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E$, $s(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_2, x_1)$.
   (d) Montrer que $s_O s(x) = x$ pour tout $x \in E$. En déduire que s est une isométrie et préciser l'application adjointe s^*. En déduire $\ker s$.
   (e) Déterminer la matrice de s dans la base f. En déduire les valeurs propres de s. s est-elle diagonalisable?