Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 − 2011

Algèbre S4

Correction du Contrôle continu n°2, avril 2011

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 16 points)** Soit E l'ensemble des fonctions f continues et bornées sur $\mathbf{R}_+$ telles que $\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty$. Soit $(f_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ la famille de fonctions telles que pour $j \in \mathbf{N}^*$, $f_j(x) = e^{-jx}$ pour $x \in \mathbf{R}_+$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   (b) Montrer que la famille $(f_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est une famille libre de E (on pourra se ramener aux polynômes).

   (c) Soit $N \in \mathbf{N}^*$ fixé. Rappeler la définition de F_N le sous-espace vectoriel engendré par $(f_j)_{1\leq j\leq N}$. Déterminer une base de F_N.

   (d) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ sur E telle que pour $(f, g) \in E^2$, $< f, g >= \int_0^\infty f(t)g(t)dt$. Montrer que $< f, g >$ existe pour toutes fonctions f et g de E. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

   (e) Pour $j \in \mathbf{N}^*$, soit l'application $u_j :\ f \in F_N \mapsto \int_0^\infty e^{-jt} f(t)dt$. Montrer que u_j est une forme linéaire sur F_N. Calculer $u_j(f_k)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

   (f) Montrer que pour tout $1 \leq j \leq N$, une base de $\ker u_j$ est la famille $(\phi_k)_{1\leq k\leq N-1}$ avec $\phi_k = (j + k)f_k - (j + k + 1)f_{k+1}$.

   (g) Montrer que $(u_j)_{1\leq j\leq N}$ est une famille libre de F_N^*.

   (h) Pour $N = 2$, déterminer la base duale de $(f_k)_{1\leq k\leq N}$.

Proof. (a) On montre que c'est un sev de l'ensemble des fonctions continues qui est un ev car une combinaison linéaire de fonctions continues bornées est une fonction continue bornée et $\int_0^\infty |f(t) + \lambda g(t)|dt \leq \int_0^\infty |f(t)|dt + |\lambda| \int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$ **(1pt)**.
(b) Les f_ij appartiennent bien à E car ce sont des fonctions continues, $\int_0^\infty f_j(t)dt = 1/j < \infty$ et $|f_j| \leq 1$ **(0.5pt)**. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots, < i_n$ des entiers tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_{i_k} = 0$. On peut alors écrire que pour tout $0 < X \leq 1$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k X^{i_k} = 0$ en posant $X = e^{-x}$. Mais un polynôme qui a une infinité de racines est nul donc $\lambda_k = 0$ pour tout k et la famille est bien libre **(2pts)**.
(c) $F_N = \{\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i,\ (\alpha_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbf{R}^N\}$. Comme la famille $(f_i)_{1\leq i\leq N}$ forme une famille libre engendrant F_N, c'est aussi une base de F_N **(1pt)**.
(d) $< f, g >= \int_0^\infty f(t)g(t)dt$. Mais $|f(t)g(t)| \leq |g(t)| \sup_{x\geq 0}\{|f(x)|\}$ et comme $\sup_{x\geq 0}\{|f(x)|\} < \infty$ et $\int_0^\infty |g(t)|dt < \infty$ on en déduit que $\int_0^\infty |f(t)g(t)|dt < \infty$ soit $< f, g >$ existe **(2pts)**.
C'est un produit scalaire (voir cours) **(0.5pts)** + **(0.5pts)** si la continuité est bien spécifiée pour le caractère défini du produit scalaire.
(e) On a $u_j(f) =< f, f_j >$ donc $u_j(f)$ existe **(0.5pts)** pour tout $f \in F_N$ (voir ci-dessus) et u_j est bien une forme linéaire sur F_N **(0.5pts)**. On a $u_j(f_k) = \int_0^\infty e^{-(j+k)t}dt = \frac{1}{j+k}$ **(1pt)**.
(f) Il est clair que $u_j(\phi_k) = 0$ donc $\phi_k \in \ker u_j$. De plus $(\phi_k)_{1\leq k\leq N-1}$ est une famille libre (car les f_j forment une famille libre et les ϕ_k sont des combinaisons linéaires hiérarchiques des f_j) de taille $N - 1$et comme $\ker u_j$ est un hyperplan (u_j non nulle) donc de dimension $N - 1$, on en déduit que la famille $(\phi_k)_{1\leq k\leq N-1}$ est une base de $\ker u_j$ **(2pts)**.

(g) Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in \mathbf{R}^N$ tel que $\sum_{k=1}^N \lambda_k u_k = 0$. Cela revient à écrire que pour tout $f \in F_N$, $< \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k, f >= 0$. donc en prenant $f = \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k$, on obtient que $\| \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k \|^2 = 0$ donc $\sum_{k=1}^N \lambda_k f_k = 0$ d'après la propriété 4 du produit scalaire. Comme la famille (f_k) est libre on en déduit que les λ_i sont tous nuls et donc les $(u_j)_{1 \leq j \leq N}$ forme une famille libre de F_N^* **(2.5pts)**.
(h) On cherche une famille $(v_j)_{1 \leq j \leq N}$ de F_N^* telle que $v_j(f_j) = 1$ et $v_j(f_k) = 0$ pour $k \neq j$. Pour ce faire on va se servir des (u_j) qui forment une base de F_N^*. Pour $N = 2$, on a $v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ et $\lambda_1/2 + \lambda_2/3 = 1$, $\lambda_1/3 + \lambda_2/4 = 0$ soit $v_1 = 18u_1 - 24u_2$. Ensuite, $v_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$ et $\mu_1/2 + \mu_1/3 = 0$, $\mu_1/3 + \mu_2/4 = 1$ soit $v_2 = -24u_1 + 36u_2$ **(2.5pts)**.

□

2. **(Sur 13 points)** Soit $E = \mathbf{R}^3$, le produit scalaire usuel sur E tel que pour $(x_1, x_2, x_3) \in E$ et $(y_1, y_2, y_3) \in E$, $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ et soit (i, j, k) la base canonique de E.

   (a) Soit $A = \{(1, 2, -1), (-2, 0, 2)\}$. Déterminer $A^\perp$ ainsi qu'une base orthonormale e de $A^\perp$. Compléter e pour obtenir une base f orthonormale de E.

   (b) Soit p le projecteur orthogonal sur $A^\perp$. Déterminer la matrice de p dans (i, j, k), puis dans f. Déterminer l'application adjointe de p. En déduire également les valeurs propres de p. p est-elle diagonalisable?

   (c) Soit l'application s telle que pour tout $x \in E$, $s(x) = 2p(x) - x$. Montrer que s est une application linéaire et que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E$, $s(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_2, x_1)$.

   (d) Montrer que $s_O s(x) = x$ pour tout $x \in E$. En déduire que s est une isométrie et préciser l'application adjointe s^*. En déduire $\ker s$.

   (e) Déterminer la matrice de s dans la base f. En déduire les valeurs propres de s. s est-elle diagonalisable?

Proof. (a) On trouve facilement $A^\perp = Vect\{(1, 0, 1)\}$ **(1pt)** dont une base orthonormale est $e = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ **(0.5pts)**. On complète facilement cette base par $((1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 1, 0))$ pour obtenir une base orthonormale de E **(1pt)**.
(b) On a $p(x) = \frac{1}{2} < (1, 0, 1), x > (1, 0, 1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)(1, 0, 1)$. Donc la matrice de p dans (i, j, k) est:

$$Mat(p, (i, j, k)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1pt)}.$$

Dans la base $f = (e_1, e_2, e_3)$, comme $p(e_1) = e_1$ et $p(e_2) = p(e_3) = 0$, on a

$$Mat(p, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1pt)}.$$

La matrice de p est symétrique donc $p^* = p$ **(0.5pts)**. De plus, on voit immédiatement que les valeurs propres de p sont 1 et 0 **(0.5pts)**. p est diagonalisable et est diagonalisée dans la base f **(1pt)**.
(c) s est une application linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires **(0.5pts)**. De plus, $s(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3) * (1, 0, 1) - (x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_2, x_1)$ **(1pt)**.
(d) On a $s_O s = 2p(2p - Id) - (2p - Id) = 4p^2 - 4p + Id = Id$ car $p^2 = p$ (projecteur) **(1pt)**. On a $s^* = 2p^* - Id^* = 2p - Id = s$ **(0.5pts)**. De plus $s_O s^* = s^*_O s = Id$ donc s est une application linéaire orthogonale **(0.5pts)**. Donc s est bijective et $\ker s = \{0_E\}$ **(1pt)**.
(e) On a $s(e_1) = 2e_1 - e_1 = e_1$, $s(e_2) = -e_2$ et $s(e_3) = -e_3$. Donc la matrice de s dans f est:

$$Mat(s, f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1pt)}.$$

s est donc diagonalisable (diagonalisée dans f) et ses valeurs propres sont 1 et -1 **(1pt)**.

□