Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 − 2012

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 13 points)** Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour P et Q deux vecteurs de E, on considère

$$< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

   (a) Montrer que pour tout $P \in E$, $P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2} P''(0)X^2$ **(1pt)**.

   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E **(2pts)**.

   (c) Donner (sans justifier) une base de E **(0.5pts)**. En déduire une base orthonormale e de E **(1pt)**.

   (d) Soit les applications $f_0(P) = P(0)$, $f_1(P) = P'(0)$ et $f_2(P) = P''(0)$. Montrer que (f_0, f_1, f_2) est une famille de formes linéaires **(0.5pts)**. En déduire une base duale de e **(1.5pts)**.

   (e) Soit g l'application $g(P) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|t|}} P(t)\, dt$. Montrer que g existe pour tout $P \in E$ **(1.5pts)**, puis montrer que g est une forme linéaire sur E **(0.5pts)**. Déterminer une base de son noyau **(1.5pts)**.

   (f) Exprimer les coordonnées de g dans la base (f_0, f_1, f_2) **(1pt)**. En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in E$, que l'on précisera, tel que $g(P) =< P, Q >$ pour tout $P \in E$ **(2pts)**.

2. **(Sur 10 points)** Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit la matrice M_x telle que:

$$M_x = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x+2 & x-2 & 2 \\ x-2 & x+2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) La matrice M_x est-elle diagonalisable? **(0.5pts)**.

   (b) Déterminer les valeurs propres de M_x (on vérifiera notamment que 0 et 1 sont toujours des valeurs propres de M_x pour tout $x \in \mathbf{R}$) **(2.5pts)**.

   (c) Déterminer, en justifiant, deux valeurs x_1 et x_2 de x **(2pts)** pour lesquelles M_x est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera dans les 2 cas **(2pts)**.

   (d) Si $x \notin \{x_1, x_2\}$ déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de M_x **(2pts)**.

   (e) Déterminer, si elles existent, les valeurs de x telles que la matrice M_x est la matrice d'une isométrie? **(1pt)**