Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, avril 2012

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(Sur 13 points)** Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour P et Q deux vecteurs de E, on considère

$$< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0).$$

   (a) Montrer que pour tout $P \in E$, $P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}\,P''(0)X^2$ **(1pt)**.

   (b) Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E **(2pts)**.

   (c) Donner (sans justifier) une base de E **(0.5pts)**. En déduire une base orthonormale e de E **(1pt)**.

   (d) Soit les applications $f_0(P) = P(0)$, $f_1(P) = P'(0)$ et $f_2(P) = P''(0)$. Montrer que (f_0, f_1, f_2) est une famille de formes linéaires **(0.5pts)**. En déduire une base duale de e **(1.5pts)**.

   (e) Soit g l'application $g(P) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,P(t)\,dt$. Montrer que g existe pour tout $P \in E$ **(1.5pts)**, puis montrer que g est une forme linéaire sur E **(0.5pts)**. Déterminer une base de son noyau **(1.5pts)**.

   (f) Exprimer les coordonnées de g dans la base (f_0, f_1, f_2) **(1pt)**. En déduire l'existence d'un polynôme $Q \in E$, que l'on précisera, tel que $g(P) =< P, Q >$ pour tout $P \in E$ **(2pts)**.

Proof. (a) On utilise la formule de Taylor en 0 à l'ordre 2 et $o(X) = 0$ car P polynôme de degré 2.
(b) Symétrie, bilinéarité et positivité facile. $< P, P >= 0$ entraîne $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$. D'après (a) on en déduit que $P = 0$.
(c) Une base de E par $(1, X, X^2)$. On montre facilement que $< 1, X >=< 1, X^2 >=< X, X^2 >= 0$, puis $< 1, 1 >= 1$, $< X, X >= 1$ et $< X^2, X^2 >= 4$, d'où $e = (e_0, e_1, e_2)$ avec $e_0 = 1$, $e_1 = 1$ et $e_2 = X^2/2$ est une base orthonormale de E.
(d) On montre que si $f_k(P) = P^{(k)}(0) \in \mathbf{R}$ alors $f_k(\lambda P + \mu Q) = \lambda P^{(k)}(0) + \mu Q^{(k)}(0) = \lambda f_k(P) + \mu f_k(Q)$ donc les f_k sont bien des formes linéaire sur E.
Si (f_0^*, f_1^*, f_2^*) est une base duale de e, alors $f_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. On a $f_0(1) = 1$, $f_0(X) = f_0(X^2/2) = 0$ donc $f_0^* = f_0$. De même $f_1^* = f_1$. Enfin $f_2^* = f_2/2$.
(e) Si $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ alors pour $t > 0$, $P(t)/\sqrt{|t|} = a_2t^{3/2} + a_1t^{1/2} + a_0t^{-1/2}$. Donc il y a un problème de convergence de l'intégrale en 0, mais on sait que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{-1/2}dt$ converge (de même pour $\int_{-1}^0 |t|^{-1/2}dt$) donc $g(P)$ existe pour tout $P \in E$. L'application g est clairement une forme linéaire d'après la linéarité de l'intégrale.
$\ker(g) = \{P \in E,\, g(P) = 0\} = \{a_2X^2 + a_1X + a_0,\, 2\big[\frac{2}{5}a_2t^{5/2} + 2a_0t^{1/2}\big]_0^1 = 0\} = \{a_2X^2 + a_1X + a_0,\, a_2 + 5a_0 = 0\}$.
On en déduit que $\big(X, 1 - 5X^2\big)$.
(f) Comme $g(P) = 4\big(\frac{1}{5}a_2 + a_0\big) = \frac{2}{5}P''(0) + 4P(0)$ donc g a pour coordonnées $(4, 0, \frac{2}{5})$.
D'après le cours (représentation de Riecz), Q existe et est unique. De plus en posant $Q(0) = 4$, $Q'(0) = 0$ et $Q''(0) = \frac{2}{5}$ on a bien $g(P) =< P, Q >$ donc $Q = 4 + \frac{1}{5}X^2$.

□

2. **(Sur 10 points)** Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit la matrice M_x telle que:

$$M_x = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x+2 & x-2 & 2 \\ x-2 & x+2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice M_x est-elle diagonalisable? **(0.5pts)**.

(b) Déterminer les valeurs propres de M_x (on vérifiera notamment que 0 et 1 sont toujours des valeurs propres de M_x pour tout $x \in \mathbf{R}$) **(2.5pts)**.

(c) Déterminer, en justifiant, deux valeurs x_1 et x_2 de x **(2pts)** pour lesquelles M_x est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel que l'on précisera dans les 2 cas **(2pts)**.

(d) Si $x \notin \{x_1, x_2\}$ déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de M_x **(2pts)**.

(e) Déterminer, si elles existent, les valeurs de x telles que la matrice M_x est la matrice d'une isométrie? **(1pt)**

Proof. (a) M_x est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ car c'est une matrice symétrique.
(b) Le polynôme caractéristique de M_x est:

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} x+2-6\lambda & x-2 & 2 \\ x-2 & x+2-6\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-6\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} 2x-6\lambda & 2x-6\lambda & 0 \\ x-2 & x+2-6\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-6\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} 2x-6\lambda & 0 & 0 \\ x-2 & 4-6\lambda & -2 \\ 2 & -4 & 2-6\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{6^3}\big(2x-6\lambda\big)\big(36\lambda^2-36\lambda\big) \\
&= \lambda(\lambda-1)(\frac{1}{3}x-\lambda).
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de M_x sont 0, 1 et $x/3$.
(c) Si $x = 3$ ou si $x = 0$ alors M_x n'a pour valeurs propres que 0 ou 1. Il est alors clair que si $M_x = P\,D\,{}^tP$, où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale avec uniquement des 0 et des 1, alors $M_x^2 = P\,D^2\,{}^tP = M_x$ donc M_x est la matrice d'une projection. De plus la projection se projette sur le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et parallèlement à celui associé à la valeur propre 0. Comme ses 2 sous-espaces sont orthogonaux car la matrice M_x est symétrique, on en déduit que M_x est une projection orthogonale.
Si $x = 3$, alors 1 est valeur propre double et le sous-espace propre associé a pour équation $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ -x + y + 2z = 0\}$ donc engendré par $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ et $(2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$. Donc M_x est la projection orthogonale sur ce sous-espace.
Si $x = 0$, alors 1 est valeur propre simple et le sous-espace propre associé a pour équation $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = -y \text{ et } y = -z\}$ donc engendré par $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$: M_x est la projection orthogonale sur ce sous-espace.
(d) D'après ce qui précède, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ engendre le sous-espace propre associé à 1.
Le sous-espace associé à 0 est $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = -y \text{ et } z = 2y\}$ donc engendré par $(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.
Enfin, le sous-espace propre associé à $x/3$ est $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x = y \text{ et } z = 0\}$ donc engendré par $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(e) Comme 0 est toujours valeur propre de M_x, cette matrice ne peut être la matrice d'une application bijective, donc M_x ne peut pas être la matrice d'une isométrie. □