Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2012 – 2013

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, mars 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(9 points)** Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E de dimension n muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
   (a) Montrer que les applications $f_i : x \in E \mapsto < x, e_i >$, où $i = 1, \cdots, n$ sont des formes linéaires de E.
   (b) Pour $i = 1, \cdots, n$, déterminer $\ker(f_i)$ et sa dimension.
   (c) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ forme une famille libre de E^*, espace dual de E.
   (d) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$.
   (e) Soit u un endomorphisme de E de matrice $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Pour $x \in E$, déterminer $u(x)$ en fonction des $f_i(x)$, des e_i et des u_{ij}.
   (f) On définit sur E^* une application $(\cdot, \cdot)$ telle que pour $f, g \in E^*$, $(f, g) = \sum_{i=1}^n f(e_i) g(e_i)$. Montrer que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur E^*.
   (g) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est une base orthonormale de E^* pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

2. **(17 points)** Soit E l'ensemble des fonctions périodiques $f : \mathbf{Z} \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$ de période $T \in \mathbf{N}$ avec $T \geq 2$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $f(x+T) = f(x)$.
   (a) Montrer que si $f \in E$, pour tout $x \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$ et $f(x+kT) = f(x)$. Etendre cette propriété à $k \in \mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que la fonction s telle que $s(x) = \sin(\frac{2\pi}{T} x)$ pour $x \in \mathbf{Z}$ appartient à E.
   (c) Soit $i \in \{1, \cdots, T\}$ et soit la fonction h_i vérifiant $h_i(x) = 1$ s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = i + kT$ et $h_i(x) = 0$ sinon. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, T\}$, $h_i \in E$.
   (d) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (e) Pour $f \in E$, montrer que $f = \sum_{i=1}^T f(i) h_i$.
   (f) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour $f, g \in E$, $< f, g >= \sum_{i=1}^T f(i) g(i)$. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.
   (g) Montrer que la famille $(h_1, \cdots, h_T)$ est une base orthonormale de E.
   (h) Montrer sans calcul qu'il existe une unique fonction $f_0 \in E$ telle que pour tout $f \in E$, $\sum_{i=1}^T f(i) =< f, f_0 >$. Que vaut f_0?
   (i) Soit $F = \{f \in E, \sum_{i=1}^T f(i) = 0\}$. En vous servant de la question précédente, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, dont on précisera la dimension et déterminer $F^\perp$.
   (j) Montrer que $s \in F$ (on pourra utiliser les exponentielles complexes).
   (k) Pour $f \in E$, déterminer la projection orthogonale de f sur F.