Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année $2012 - 2013$

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°2, mars 2013

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(9 points)** Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E de dimension n muni du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

   (a) Montrer que les applications $f_i : x \in E \mapsto < x, e_i >$, où $i = 1, \cdots, n$ sont des formes linéaires de E.

   (b) Pour $i = 1, \cdots, n$, déterminer $\ker(f_i)$ et sa dimension.

   (c) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ forme une famille libre de E^*, espace dual de E.

   (d) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est la base duale de $(e_1, \cdots, e_n)$.

   (e) Soit u un endomorphisme de E de matrice $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Pour $x \in E$, déterminer $u(x)$ en fonction des $f_i(x)$, des e_i et des u_{ij}.

   (f) On définit sur E^* une application $(\cdot, \cdot)$ telle que pour $f, g \in E^*$, $(f, g) = \sum_{i=1}^n f(e_i) g(e_i)$. Montrer que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur E^*.

   (g) Montrer que $(f_1, \cdots, f_n)$ est une base orthonormale de E^* pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Proof. (a) Il est clair que les f_i sont à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $f_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =< e_i, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 >= \lambda_1 < e_i, x_1 > + \lambda_2 < e_i, x_2 >$ en raison de la distributivité du produit scalaire et ainsi $f_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f_i(x_1) + \lambda_2 f_i(x_2)$: f_i est une forme linéaire sur E **(1pt)**.
(b) $\ker(f_i) = \{e_i\}^\perp$, hyperplan de dimension $n-1$ **(1pt)**.
(c) On suppose que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$ avec $(\alpha_i) \in \mathbf{R}^n$. On a donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i < x, e_i >= 0$ pour tout $x \in E$. En appliquant cette relation à $x = e_j$ pour $j = 1, \cdots, n$, on obtient $\alpha_j = 0$ car les (e_i) forment une base orthonormale. Donc $(f_1, \cdots, f_n)$ est une famille libre de E^* **(1pt)**.
(d) On a $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, donc c'est bien la base duale **(0.5pts)**.
(f) On a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Or $x = \sum_{j=1}^n f_j(x) e_j$. Donc comme u est un endomorphisme, $u(x) = u\big(\sum_{j=1}^n f_j(x) e_j\big) = \sum_{j=1}^n f_j(x) u(e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} f_j(x) e_i$ **(1.5pt)**.
(g) Il est clair que $(f, g) = (g, f)$ et que $(f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 (f, g_1) + \lambda_2 (f, g_2)$. Ensuite, $(f, f) = \sum_{i=1}^n f^2(e_i)$ donc $(f, f) \geq 0$ **(0.5pts)**. Enfin si $(f, f) = 0$ alors $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, donc si $x \in E$, alors il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, donc $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = 0$. Ainsi $f = 0_{E^*}$ **(2pts)**.
(h) On a $(f_i f_i) = \sum_{j=1}^n f_i(e_j) f_i(e_j) = f_i^2(e_i) = 1$ et pour $i \neq j$, $(f_i, f_j) = 0$: $(f_1, \cdots, f_n)$ est bien une famille orthonormale de E^* **(0.5pts)**. Mais comme $\dim(E^*) = \dim(E) = n$, on en déduit que $(f_1, \cdots, f_n)$ est une famille libre de n vecteur dans un espace de dimension n; c'est donc une bon de E^* **(1pt)**. ☐

2. **(17 points)** Soit E l'ensemble des fonctions périodiques $f : \mathbf{Z} \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$ de période $T \in \mathbf{N}$ avec $T \geq 2$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $f(x + T) = f(x)$.

   (a) Montrer que si $f \in E$, pour tout $x \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}$ et $f(x + kT) = f(x)$. Etendre cette propriété à $k \in \mathbf{Z}$.

   (b) Montrer que la fonction s telle que $s(x) = \sin(\frac{2\pi}{T}\, x)$ pour $x \in \mathbf{Z}$ appartient à E.

(c) Soit $i \in \{1, \cdots, T\}$ et soit la fonction h_i vérifiant $h_i(x) = 1$ s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = i+kT$ et $h_i(x) = 0$ sinon. Montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, T\}$, $h_i \in E$.

(d) Montrer que E est un espace vectoriel.

(e) Pour $f \in E$, montrer que $f = \sum_{i=1}^{T} f(i) h_i$.

(f) Soit l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour $f, g \in E$, $< f, g >= \sum_{i=1}^{T} f(i) g(i)$. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E.

(g) Montrer que la famille $(h_1, \cdots, h_T)$ est une base orthonormale de E.

(h) Montrer sans calcul qu'il existe une unique fonction $f_0 \in E$ telle que pour tout $f \in E$, $\sum_{i=1}^{T} f(i) =< f, f_0 >$. Que vaut f_0?

(i) Soit $F = \{f \in E, \sum_{i=1}^{T} f(i) = 0\}$. En vous servant de la question précédente, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, dont on précisera la dimension et déterminer $F^{\perp}$.

(j) Montrer que $s \in F$ (on pourra utiliser les exponentielles complexes).

(k) Pour $f \in E$, déterminer la projection orthogonale de f sur F.

Proof. (a) On montre la propriété par récurrence: vrai trivialement pour $k = 0$. Si vrai au rang k, alors $f(t+kT) = f(t)$. Mais $f((t+kT)+T) = f(t+kT)$ d'après la définition de la périodicité, donc $f(t+(k+1)T) = f(t)$ et la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$ **(1pt)**.
On a $f(t+kT) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbf{Z}$ et tout $k \in \mathbf{N}$. Prenons $t' = t+kT$. Alors $f(t') = f(t'-kT)$ pour tout $t \in \mathbf{Z}$, donc tout $t' \in \mathbf{Z}$ **(1pt)**.
(b) On a pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $s(x+T) = \sin(\frac{2\pi}{T}(x+T)) = \sin(\frac{2\pi}{T} x + 2\pi T) = s(x)$ **(0.5pts)**.
(c) Soit $i \in \{1, \cdots, T\}$. Pour $x \in Z$, on a $h_i(x) = 1$ si $x = i+kT$, donc si $x = i+T$, et ainsi $h_i(x) = h_i(x+T) = 1$. Sinon, $h_i(x) = 0$ et comme alors $x+T \neq i+kT$, alors $h_i(x+T) = 0 = h_i(x)$. Dans tous les cas on a bien $h_i \in E$ **(0.5pts)**.
(d) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de F ensemble des fonctions $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, qui est un espace-vectoriel. Soit $f_1, f_2 \in E$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{Z}$, $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x+T) = \lambda_1 f_1(x+T) + \lambda_2 f_2)(x+T) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, donc $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in E$. Ainsi E est bien un sev donc un ev **(1pt)**.
(e) Soit $f \in E$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, T\}$, $f(i) = \sum_{j=1}^{T} f(j) h_j(i) = f(i) h_i(i)$, donc la formule est vraie pour $x \in \{1, \cdots, T\}$. Pour $x = i+kT$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on a clairement $f(x) = f(i)$ car $f \in E$. Mais comme les h_j appartiennent à E, on a également $h_j(x) = h_j(i+kT) = h_j(i)$, donc $\sum_{j=1}^{T} f(j) h_j(i) = f(i)$, soit encore $f(x) = \sum_{j=1}^{T} f(j) h_j(x)$ **(1.5pt)**.
(f) La symétrie est claire (liée à la commutativité de la multiplication dans $\mathbf{R}$). Pour la distributivité, on a bien $< f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 >= \lambda_1 < f, g_1 > + \lambda_2 < f, g_2 >$. Pour la positivité, $< f, f >= \sum_{i=1}^{T} f^2(i) \geq 0$ **(0.5pts)**. Enfin, si $< f, f >= 0$ alors $f(i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, T\}$. D'après la question (f), on en déduit que $f = 0_E$. Donc $< \cdot, \cdot >$ est bien un produit scalaire sur E **(1pt)**.
(g) On a $< h_i, h_i >= h_i^2(i) = 1$. De plus pour $i \neq j$, $< h_i, h_j >= \sum_{k=1}^{T} h_i(k) h_j(k) = 0$. Donc $(h_1, \cdots, h_T)$ est bien une famille orthonormale **(0.5pts)**. De plus d'après la question (f), $(h_1, \cdots, h_T)$ est une famille génératrice de E. C'est donc bien une base orthonormale de E **(1.5pts)**.
(h) On montre d'abord que l'application $u : f \mapsto \sum_{i=1}^{T} f(i)$ est une forme linéaire sur E. En effet, les valeurs prises sont bien dans $\mathbf{R}$. De plus, il est clair que $u(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = sum_{i=1}^{T} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(i) = \lambda_1 u(f_1) + \lambda_2 u(f_2)$. D'après le théorème de représentation de Riecsz, on sait que comme E est euclidien (de dimension T), il existe un unique vecteur f_0 tel que $< f, f_0 >= u(f)$ pour tout $f \in E$ **(1.5pts)**. On remarque que l'application f_0 telle que $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{Z}$ vérifie bien cette égalité **(0.5pts)**.
(i) F est le noyau de u donc F est un hyperplan (car u non nulle) donc un sev de E **(0.5pts)** et $\dim(F) = T-1$ **(0.5pts)**.
Comme $u(f) =< f, f_0 >$, $F = \{f \in E, < f, f_0 >\} = \{f_0\}^{\perp}$ et on en déduit que $F^{\perp} = Vect(f_0)$ **(1pt)**.
(j) On doit montrer que $\sum_{j=1}^{T} s(j) = 0$. Or $s(j) = \mathcal{I}m(e^{2i\pi j/T})$ donc $\sum_{j=1}^{T} s(j) = 0 = \mathcal{I}m\big(\sum_{j=1}^{T} e^{2i\pi j/T}\big) = \mathcal{I}m\big(e^{2i\pi/T}(1 - e^{2i\pi T/T})(1 -^{2i\pi/T})\big)$ avec la formule de la somme d'une suite géométrique. Or $(1 - e^{2i\pi T/T}) = 0$ donc $\sum_{j=1}^{T} s(j) = 0$ et $s \in F$ **(2pts)**.
(k) Pour tout $x \in E$, on a $P_F(f) = f - P_{F^{\perp}}(f)$. Mais comme $F^{\perp} = Vect(f_0)$ une base de $F^{\perp}$ est $f_0/\sqrt{< f_0, f_0 >} = f_0/\sqrt{T}$. Ainsi $P_{F^{\perp}}(f) = \frac{1}{T} < f, f_0 > f_0 = \big(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} f(k)\big) f_0$ et $P_F(f) = f - \big(\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} f(k)\big) f_0$ **(2pts)**.

$\square$