Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, mars 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(10 points)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et soit f la fonction paire telle que $f(x) = 1 + \alpha x$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $f(x) = 1 + \alpha(\pi - x)$ pour $x \in [\pi/2, \pi]$.
   (a) Tracer f sur $[-\pi, \pi]$.
   (b) Pour $\alpha = 0$, montrer sans calcul que f est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner son développement en série de Fourier S_{f_α}.
   (c) On considère désormais α quelconque dans $\mathbf{R}$. Déterminer les coefficients de Fourier $b_n(f_\alpha)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = (-1)^n \int_{\pi/2}^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx$. En déduire que les coefficients de Fourier $a_{2p+1}(f_\alpha)$ sont nuls pour $p \in \mathbf{N}$.
   (e) Déterminer $a_n(f_\alpha)$ pour $n \in \mathbf{N}$. En déduire que f est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner sa série de Fourier S_{f_α}.
   (f) Déduire de ce qui précède que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2. **(15 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit u une isométrie vectorielle de E. On note $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans e.
   (a) Si $n = 1$, déterminer toutes les expressions possibles de M.
   (b) On suppose désormais n quelconque. Ecrire, en justifiant, m_{ij} à l'aide de u, des e_k et de $< \cdot, \cdot >$. Montrer que pour tout $x \in E$, si X est le vecteur colonne comportant les coordonnées de x dans e, alors $< x, u(x) >= {}^tX\, M\, X$.
   (c) Déterminer un vecteur $x_0 \in E$ tel que $< x_0, u(x_0) >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}$. En déduire que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}| \leq n$.
   (d) En choisissant d'autres x appropriés, montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|m_{ii}| \leq 1$.
   (e) Que vaut ${}^tM\, M$? En utilisant les propriétés de la trace d'une matrice, en déduire que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2 = n$.
   (f) Pour $n = 2$, déterminer u de telle manière que $m_{ii} = 0$ pour $i = 1, 2$. Déterminer suivant les cas, les valeurs propres de M.