Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2013 – 2014

Algèbre S4

Correction du contrôle continu n°2, mars 2014

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(10 points)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et soit f la fonction paire telle que $f(x) = 1 + \alpha x$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $f(x) = 1 + \alpha(\pi - x)$ pour $x \in [\pi/2, \pi]$.
   (a) Tracer f sur $[-\pi, \pi]$.
   (b) Pour $\alpha = 0$, montrer sans calcul que f est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner son développement en série de Fourier S_{f_α}.
   (c) On considère désormais α quelconque dans $\mathbf{R}$. Déterminer les coefficients de Fourier $b_n(f_\alpha)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = (-1)^n \int_{\pi/2}^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx$. En déduire que les coefficients de Fourier $a_{2p+1}(f_\alpha)$ sont nuls pour $p \in \mathbf{N}$.
   (e) Déterminer $a_n(f_\alpha)$ pour $n \in \mathbf{N}$. En déduire que f est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et donner sa série de Fourier S_{f_α}.
   (f) Déduire de ce qui précède que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Proof. (a) f est constituée de fonctions triangles...**(1pt)**.

(b) Si $\alpha = 0$, f est constante et vaut 1, qui est son développement en série de Fourier: $S_{f_0}(x) = 1$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ **(1pt)**.

(c) Comme f est paire, $b_n(f_\alpha) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ **(0.5pts)**.

(d) Pour $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = -\int_{\pi}^{\pi/2} f_\alpha(\pi-y)\cos(n(\pi-y))dy$ avec $y = \pi - x$. D'où $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = \cos(ny)\int_{\pi/2}^{\pi} f_\alpha(y)\cos(ny)dy = (-1)^n \int_{\pi/2}^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx$ **(1.5pts)**.
Si $n = 2p+1$, $(-1)^n = -1$, donc $\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx$, d'où $\int_0^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = 0$, et comme f_α est paire, $a_{2p+1}(f_\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_\alpha(x)\cos(nx)dx = 0$ **(1pt)**.

(e) Pour $n = 2p$ pair et $n \neq 0$, $a_{2p}(f_\alpha) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f_\alpha(x)\cos(2px)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\alpha x)\cos(2px)dx = \frac{2}{\pi p}\Big(\big[(1+\alpha x)\sin(2px)\big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\alpha\sin(2px)dx\Big) = \frac{\alpha}{\pi p^2}\big[\cos(2px)\big]_0^{\pi/2} = \frac{\alpha((-1)^p-1)}{\pi p^2}$. D'où $a_{2p}(f_\alpha) = 0$ si p est pair et $a_{2p}(f_\alpha) = -\frac{2\alpha}{\pi p^2}$ si p est impair **(2pts)**.
Pour $n = 0$, $a_0(f_\alpha) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1+\alpha x)dx = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi^2}{8}\right) = 2 + \alpha\frac{\pi}{2}$ **(1pt)**.
Comme la fonction f_α est continue sur $[-\pi, \pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, d'après le Théorème de Dirichlet, f_α est développable en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ et pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f_\alpha(x) = S_{f_\alpha}(x) = 1 + \alpha\frac{\pi}{4} - \alpha\frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos((4p+2)x)}{(2p+1)^2} \qquad \textbf{(1pt)}.$$

(f) De tout ceci, on déduit que pour $x = 0$, $f_\alpha(0) = 1$, d'où $\frac{\pi}{4}\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, et ainsi $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ **(1pt)**.

□

2. **(15 points)** Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E et soit u une isométrie vectorielle de E. On note $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de u dans e.

   (a) Si $n = 1$, déterminer toutes les expressions possibles de M.

   (b) On suppose désormais n quelconque. Ecrire, en justifiant, m_{ij} à l'aide de u, des e_k et de $< \cdot, \cdot >$. Montrer que pour tout $x \in E$, si X est le vecteur colonne comportant les coordonnées de x dans e, alors $< x, u(x) >= {}^tX\,M\,X$.

   (c) Déterminer un vecteur $x_0 \in E$ tel que $< x_0, u(x_0) >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}$. En déduire que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}| \le n$.

   (d) En choisissant d'autres x appropriés, montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|m_{ii}| \le 1$.

   (e) Que vaut ${}^tM\,M$? En utilisant les propriétés de la trace d'une matrice, en déduire que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}^2 = n$.

   (f) Pour $n = 2$, déterminer u de telle manière que $m_{ii} = 0$ pour $i = 1, 2$. Déterminer suivant les cas, les valeurs propres de M.

Proof. (a) On a ${}^tMM = M^2 = (1)$ car M est une matrice orthogonale et parce que ${}^tM = M$ du fait que M n'a qu'une composante. D'où $M = (1)$ ou $M = (-1)$ **(1pt)**.

(b) On a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n < u(e_j), e_i > e_i$ car e est une base orthonormale, donc $M = (< u(e_j), e_i >)_{1 \le i,j \le n}$ **(1pt)**. De la même manière on peut écrire que $X = (< x, e_i >)_{1 \le i \le n}$. D'où, en effectuant le produit matriciel, ${}^tX\,M\,X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n < x, e_i >< x, e_j >< u(e_j), e_i >$.
Par ailleurs, $x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$, d'où $u(x) = \sum_{i=1}^n < x, e_i > u(e_i)$. On en déduit que $< x, u(x) >=< \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i, \sum_{j=1}^n < x, e_j > u(e_j) >=< \sum_{i=1}^n < x, e_i > \sum_{j=1}^n < x, e_j >< e_i, u(e_j) >= {}^tX\,M\,X$ d'après la bilinéarité du produit scalaire **(2.5pts)**.

(c) Il est clair que le vecteur $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$, donc $X_0 = {}^t(1, 1, \cdots, 1)$ vérifie $< x_0, u(x_0) >= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}$ **(1pt)**.
On a donc $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right| = | < x_0, u(x_0) > |$. Mais d'après l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $| < x_0, u(x_0) > | \le \|x_0\| \times \|u(x_0)\|$. Mais il est facile de voir que $\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$ et comme u est une isométrie, $\|u(x_0)\| = \|x_0\| = \sqrt{n}$. On en déduit donc que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \right| \le \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$ **(2.5pts)**.

(d) Considérons $x = e_i$ (soit $X = {}^t(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, le 1 étant en $i$ème position). Alors $< e_i, u(e_i) >= m_{ii}$. Mais en utilisant encore l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, $| < e_i, u(e_i) > | \le \|e_i\| \times \|u(e_i)\| = \|e_i\|^2$ car u est une isométrie. Comme $\|e_i\| = 1$, on en déduit que $|m_{ii}| \le 1$ **(2pts)**.

(e) On a M isométrie donc ${}^tM\,M = I_n$ **(0.5pts)**.
Mais ${}^tM\,M = (\sum_{k=1}^n m_{ik} m_{jk})_{1 \le i,j \le n}$, donc $\mathrm{Trace}({}^tM\,M) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}^2$. Mais du fait que $\mathrm{Trace}(I_n) = n$, on en déduit que $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}^2 = n$ **(1.5pts)**.

(f) Si $m_{ii} = 0$, alors, du fait que ${}^tM\,M = I_2$, on a $m_{12}^2 = m_{21}^2 = 1$. On a donc $m_{12} = \pm 1$ et $m_{21} = \pm 1$ **(1pt)**.
Si $m_{12} = m_{21} = 1$, ou bien $m_{12} = m_{21} = -1$, alors le polynome caractéristique de M est $X^2 - 1$ et les valeurs propres de M sont donc 1 et -1.
Si $m_{12} = -m_{21} = 1$, ou bien $m_{12} = -m_{21} = -1$, alors le polynome caractéristique de M est $X^2 + 1$ et les valeurs propres de M sont donc i et $-i$ **(2pts)**.

□