Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, avril 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(7 points + 6 facultatifs)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et soit la matrice M_α telle que

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{4} & \alpha - \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \alpha - \frac{1}{4} & \alpha + \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que la matrice M_α est la matrice d'une isométrie vectorielle si et seulement si $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ **(2pts)**.

   (b) Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que M_α soit diagonalisable **(0.5pts)** et déterminer ses valeurs propres **(2.5pts)**.

   (c) Pour $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, calculer M_α^n où $n \in \mathbf{N}^*$ **(2pts)**.

   (d) **(Question facultative sur 6 points)** Pour $\alpha \neq \pm\frac{1}{2}$, calculer M_α^n où $n \in \mathbf{N}^*$.

2. **(20 points)** Soit E l'espace vectoriel des suites réelles indicées dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ u_n \in \mathbf{R}\}$.

   (a) On note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$. Déterminer l'élément nul de F **(0.5pts)**, puis une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de F telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ **(1pt)** et enfin une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de E n'appartenant pas à F **(0.5pts)**.

   (b) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ **(0.5pts)**. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de E **(1.5pts)**.

   (c) On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de F, on ait $< u, v >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que $< u, v >$ existe toujours **(1pt)** et que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur F **(2pts)**.

   (d) Pour $j \in \mathbf{Z}$, soit la suite $u^{(j)} = (u_n^{(j)})_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que $u_j^{(j)} = 1$ et $u_n^{(j)} = 0$ pour $n \neq j$. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $u^{(j)} \in F$ **(0.5pts)**, puis montrer que la famille $(u^{(j)})_{j\in\mathbf{Z}}$ est une famille orthonormale de F **(1.5pts)**.

   (e) Soit f l'application telle que pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, $f(u) = v$ avec $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $v_n = u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que f est un endomorphisme sur F **(1pt)**.

   (f) Montrer que f est une isométrie sur F **(1.5pts)**. Montrer que l'application f admet une application adjointe f^* que l'on explicitera **(1pt)**. En déduire que f est un isomorphisme de F dont on précisera l'application réciproque f^{-1} **(0.5pts)**.

   (g) Montrer que f admet une infinité de valeur propres réelles dans E **(2.5pts)** mais aucune valeur propre réelle dans F **(1.5pts)**.

   (h) Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on note $f^p = f_o f_o \cdots {}_o f$, la composition étant effectuée p fois. Montrer que f^p est une isométrie de F pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ **(1.5pts)** et déterminer $(f^p)^*$ **(1.5pts)**.