Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2014 – 2015

Algèbre S4

Contrôle continu n°2, avril 2015

Examen de 1h20. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(7 points + 6)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et soit la matrice M_α telle que

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+\frac14 & \alpha-\frac14 & \frac{\sqrt6}{4} \\ \alpha-\frac14 & \alpha+\frac14 & -\frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & -\frac{\sqrt6}{4} & -\frac12 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que la matrice M_α est la matrice d'une isométrie vectorielle si et seulement si $\alpha = \pm\frac12$ **(2pts)**.

(b) Déterminer l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que M_α soit diagonalisable **(0.5pts)** et déterminer ses valeurs propres **(2.5pts)**.

(c) Pour $\alpha = \pm\frac12$, calculer M_α^n où $n \in \mathbf{N}^*$ **(2pts)**.

(d) **(Question facultative sur 6 points)** Pour $\alpha \neq \pm\frac12$, calculer M_α^n où $n \in \mathbf{N}^*$.

Proof. (a) Pour que M_α soit la matrice d'une isométrie vectorielle, il faut que ${}^tM_\alpha\, M_\alpha = I_3$. Or la matrice M_α est symétrique d'où ${}^tM_\alpha\, M_\alpha = M_\alpha^2$, soit

$$\begin{pmatrix} \alpha+\frac14 & \alpha-\frac14 & \frac{\sqrt6}{4} \\ \alpha-\frac14 & \alpha+\frac14 & -\frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & -\frac{\sqrt6}{4} & -\frac12 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (\alpha+\frac14)^2+(\alpha-\frac14)^2+\frac38 & 2(\alpha^2-\frac1{16})-\frac38 & 0 \\ 2(\alpha^2-\frac1{16})-\frac38 & (\alpha+\frac14)^2+(\alpha-\frac14)^2+\frac38 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aussi aboutit-on aux conditions:

$$\begin{cases} (\alpha+\frac14)^2+(\alpha-\frac14)^2+\frac38 &= 1 \\ 2(\alpha^2-\frac1{16})-\frac38 &= 0 \end{cases}$$

Ces 2 équations aboutissent à une seule qui est $\alpha^2 = \frac14$ et donc $\alpha = \pm\frac12$.

(b) La matrice étant symétrique elle est diagonalisable dans $\mathbf{R}$ pour toute valeur de $\alpha \in \mathbf{R}$.
Pour la diagonaliser, on calcule le polynôme caractéristique qui est tel que:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \alpha+\frac14-\lambda & \alpha-\frac14 & \frac{\sqrt6}{4} \\ \alpha-\frac14 & \alpha+\frac14-\lambda & -\frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & -\frac{\sqrt6}{4} & -\frac12-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha+\frac14-\lambda & 2\alpha-\lambda & \frac{\sqrt6}{4} \\ \alpha-\frac14 & 2\alpha-\lambda & -\frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & 0 & -\frac12-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{(on somme les 2 premières colonnes)} \\ &= \det \begin{pmatrix} \alpha+\frac14-\lambda & 2\alpha-\lambda & \frac{\sqrt6}{4} \\ -\frac12+\lambda & 0 & -2\frac{\sqrt6}{4} \\ \frac{\sqrt6}{4} & 0 & -\frac12-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{(on soustrait la première ligne à la seconde)} \\ &= -(2\alpha-\lambda)\big(\frac14-\lambda^2+\frac34\big). \end{aligned}$$

On en déduit donc que M_α admet pour racines 1, -1 et 2α.

(c) Lorsque $2\alpha = \pm 1$, soit $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, on retrouve le cas précédent de l'isométrie! Aussi a-t-on: $M_\alpha^2 = I_3$, donc $M_\alpha^n = I_3$ si n est pair et $M_\alpha^n = M_\alpha$ si n est impair.

(d) Si $2\alpha \neq \pm 1$ alors 1, -1 et 2α sont racines simples. Ceci implique que:

Le sous-espace propre associé à 1 est défini par: $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} (\alpha-\frac{3}{4})x + (\alpha-\frac{1}{4})y + \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \\ (\alpha-\frac{1}{4})x + (\alpha-\frac{3}{4})y - \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} -2x+\sqrt{6}z = 0 \\ 2y+\sqrt{6}z = 0 \end{array}\right.\right\} = \mathrm{Vect}\big((-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{2})\big)$.

Le sous-espace propre associé à -1 est défini par: $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} (\alpha+\frac{5}{4})x + (\alpha-\frac{1}{4})y + \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \\ (\alpha-\frac{1}{4})x + (\alpha+\frac{5}{4})y - \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} 6x+\sqrt{6}z = 0 \\ -6y+\sqrt{6}z = 0 \end{array}\right.\right\} = \mathrm{Vect}\big((-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{3}}{2})\big)$.

Le sous-espace propre associé à -1 est défini par: $\left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} (-\alpha+\frac{1}{4})x + (\alpha-\frac{1}{4})y + \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \\ (\alpha-\frac{1}{4})x + (-\alpha+\frac{1}{4})y - \frac{\sqrt{6}}{4}z = 0 \end{array}\right.\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \left\{ \begin{array}{c} x-y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.\right\} = \mathrm{Vect}\big((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\big)$.

On en déduit donc que $M = Q\,D\,{}^tQ$ donc $M^n = Q\,D^n\,{}^tQ$ pour $n \in \mathbf{N}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{aligned}
M^n &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2\alpha)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -(-1)^n\frac{1}{\sqrt{8}} & (-1)^n\frac{1}{\sqrt{8}} & (-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2\alpha)^n & \frac{1}{\sqrt{2}}(2\alpha)^n & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3+(-1)^n+4(2\alpha)^n & -3-(-1)^n+4(2\alpha)^n & \sqrt{6}(1-(-1)^n) \\ -3-(-1)^n+4(2\alpha)^n & 3+(-1)^n+4(2\alpha)^n & \sqrt{6}((-1)^n-1) \\ \sqrt{6}(1-(-1)^n) & \sqrt{6}((-1)^n-1) & 2(1+3(-1)^n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

2. **(20 points)** Soit E l'espace vectoriel des suites réelles indicées dans $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ u_n \in \mathbf{R}\}$.

(a) On note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$. Déterminer l'élément nul de F **(0.5pts)**, puis une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de F telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ **(1pt)** et enfin une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de E n'appartenant pas à F **(0.5pts)**.

(b) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ **(0.5pts)**. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de E **(1.5pts)**.

(c) On considère l'application $< \cdot, \cdot >$ telle que pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de F, on ait $< u, v >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que $< u, v >$ existe toujours **(1pt)** et que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur F **(2pts)**.

(d) Pour $j \in \mathbf{Z}$, soit la suite $u^{(j)} = (u_n^{(j)})_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que $u_j^{(j)} = 1$ et $u_n^{(j)} = 0$ pour $n \neq j$. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $u^{(j)} \in F$ **(0.5pts)**, puis montrer que la famille $(u^{(j)})_{j\in\mathbf{Z}}$ est une famille orthonormale de F **(1.5pts)**.

(e) Soit f l'application telle que pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, $f(u) = v$ avec $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $v_n = u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que f est un endomorphisme sur F **(1pt)**.

(f) Montrer que f est une isométrie sur F **(1.5pts)**. Montrer que l'application f admet une application adjointe f^* que l'on explicitera **(1pt)**. En déduire que f est un isomorphisme de F dont on précisera l'application réciproque f^{-1} **(0.5pts)**.

(g) Montrer que f admet une infinité de valeur propres réelles dans E **(2.5pts)** mais aucune valeur propre réelle dans F **(1.5pts)**.

(h) Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on note $f^p = f_o f_o \cdots_o f$, la composition étant effectuée p fois. Montrer que f^p est une isométrie de F pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ **(1.5pts)** et déterminer $(f^p)^*$ **(1.5pts)**.

Proof. (a) L'élément nul 0_F est la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
Un exemple de suite de F est $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que $u_n = 2^{-|n|} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
Un exemple de suite de E n'appartenant pas à F est $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, car alors $\sum u_n^2 = \infty$.

(b) On a $2x^2 + 2y^2 - (x+y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$.
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, il est clair que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$ car $\sum(\lambda u_n)^2 = \lambda^2 \sum u_n^2 < \infty$. De plus pour $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, on a $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} + (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$ car $\sum(u_n + v_n)^2 \leq 2\sum u_n^2 + v_n^2 < \infty$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

(c) Pour $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, on a $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ donc $|\sum u_n v_n| \leq \sum |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\sum u_n^2 + v_n^2 < \infty$.
Donc $< u, v >$ existe toujours.
$< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire car $< u, v >=< v, u >$ et $< u, \lambda v + \mu w >= \lambda < u, v > +\mu < u, w >$ (facile...).
De plus $< u, u >= \sum u_n^2 \geq 0$. Enfin, $< u, u >= 0 \implies \sum u_n^2 = 0 \implies u_n = 0\ \forall n \in \mathbf{Z} \implies u = 0_F$.

(d) Pour $j \in \mathbf{Z}$, $u^{(j)} \in E$ par définition. De plus $\sum(u_n^{(j)})^2 = 1 < \infty$ donc $u^{(j)} \in F$.
Pour $j_1 \neq j_2 \in \mathbf{Z}$, $< u^{(j_1)}, u^{(j_2)} >= \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n^{(j_1)} u_n^{(j_2)} = u_{j_1}^{(j_1)} u_{j_1}^{(j_2)} + u_{j_2}^{(j_1)} u_{j_2}^{(j_2)} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. La famille est donc orthogonale et comme $\sum(u_n^{(j)})^2 = 1$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ elle est orthonormale.

(e) Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in F$, et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, on a $f(\lambda u + \mu v) = w$ avec $w_n = (\lambda u + \mu v)_{n-1}$ pour $n \in Z$, d'où $w_n = \lambda u_{n-1} + \mu v_{n-1}$. D'où $w_n = \lambda f(u_n) + \mu f(v_n)$ et ainsi $w = \lambda f(u) + \mu f(v)$ donc $f \in \mathcal{L}(F)$.

(f) On a $\|f(u)\|^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_{n-1}^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n^2 = \|u\|^2$ donc f est bien une isométrie.
On sait que pour une isométrie f^* existe et $f^* = f^{-1}$. Or $f^{-1}(u) = v$ avec $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, car ainsi $f^{-1}(f(u)) = (u_{(n-1)+1})_n = u$.
Par définition d'une isométrie, f est bien un isomorphisme et f^{-1} existe et vient d'être préciser.

(g) Si $\lambda \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de f, alors il existe $u \in E$ telle que $f(u) = \lambda u$, soit $u_{n-1} = \lambda u_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Si $\lambda = 0$, cela revient à $u = 0_F$. Si $\lambda \neq 0$, cela revient à $u_{n+1} = \lambda^{-1} u_n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, soit une suite de type géométrique et ainsi il existe $u_0 \in \mathbf{R}$ tel que $u_n = (\lambda)^{-n} u_0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Ainsi l'ensemble des valeurs propres dans E de f est $\mathbf{R}^*$ et pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$, le sous-espace propre associé à λ est la droite vectorielle $\{u == (u_n)_{n\in\mathbf{Z}},\ \forall n \in \mathbf{Z},\ u_n = (\lambda)^{-n} u_0,\ u_0 \in \mathbf{R}\}$.
Dans F, on peut reprendre le raisonnement précédent, mais la suite u telle que $u_n = (\lambda)^{-n} u_0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ n'appartient pas à F sauf si $u_0 = 0$, car alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n^2 = u_0^2 \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\lambda)^{-2n}$ cette série n'étant pas convergente (si $|\lambda| \geq 1$, son terme général ne tend pas vers 0 quand $n \to -\infty$, quand $|\lambda| < 1$, son terme général ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$). Le cas $u_0 = 0$ conduisant à $u = 0_F$, λ n'est alors pas valeur propre. Donc f n'admet pas de valeur propre réelle dans F.

(h) Pour $p \in \mathbf{N}^*$, $u \in E$, $\|f^{p+1}(u)\| = \|f(f^p(u))\|$. En posant $v = f^p(u)$ et par le fait que f est une isométrie, on a donc $\|f(v)\| = \|v\|$, donc $\|f^{p+1}(u)\| = \|f^p(u)\|$. Par itération, on a donc $\|f^{p+1}(u)\| = \|u\|$ donc f^p est bien une isométrie.
A nouveau $(f^p)^*$ existe car f^p est une isométrie et $(f^p)^* = (f^p)^{-1} = (f^{-1})^p$ ce qui implique que $(f^p)^*(u) = v$ avec $v_n = u_{n+p}$.

□