Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2010 – 2011

Algèbre S4

Examen final, juin 2011

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

Vous pouvez traiter les questions dans l'ordre que vous désirez. Beaucoup de questions peuvent être résolues même si les précédentes n'ont pas été traitées...

1. **(16 pts)** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel constitué par les matrices carrés de taille 2 à coefficients réels.

   (a) Montrer que E est de dimension 4 et donner une base e de E.

   (b) Déterminer le vecteur Z des coordonnées dans la base e de la matrice $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Pour M_1 et M_2 dans E, on note $< M_1, M_2 >= \mathrm{Trace}({}^tM_1\, M_2)$, où d'une manière générale, ${}^tM$ est la matrice transposée d'une matrice M. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire de E.

   (d) Déterminer la matrice du produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ dans la base e.

   (e) Soit u l'application de E dans $\mathbf{R}$ telle que $u(M) = \mathrm{Trace}(M\, J)$ pour toute matrice $M \in E$. Montrer que u est une forme linéaire. Déterminer $M_0 \in E$ telle que $u(M) =< M, M_0 >$ pour toute matrice $M \in E$.

   (f) Déterminer $J^\perp$.

   (g) Déterminer, dans e, la matrice de la projection orthogonale sur $J^\perp$.

   (h) Soit I_2 la matrice identité de E. Déterminer la distance (pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$) entre I_2 et $J^\perp$.

   (i) Pour M_1 et M_2 dans E, on définit $\phi(M_1, M_2) = \mathrm{Trace}({}^tM_1\, J\, M_2)$. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique. Donner la signature de Φ, forme quadratique associée à ϕ. L'application ϕ est-elle un produit scalaire?

2. **(6 pts)** Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{\alpha\, |x|}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$, avec $\alpha \leq 0$.

   (a) Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$. f est-elle continue sur $\mathbf{R}$? Est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$? $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$?

   (b) On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Donner le développement en série de Fourier de f sur $\mathbf{R}$.

   (c) Pour $\alpha \neq 0$, déterminer la série de Fourier $S(f)$ de f (on pourra utiliser une double intégration par parties) et montrer que $S(f) = f$ sur $\mathbf{R}$. En déduire pour $\alpha \neq 0$, $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{\alpha^2+n^2}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}$