Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.A.S.S. deuxième année 2011 – 2012

Algèbre S4

Examen de seconde session, mai 2012

Examen de 2h00. Tout document ou calculatrice est interdit.

1. **(6 points)** Soit $a \in [0, \pi]$ et f_a la fonction 2π-périodique telle que $f_a(x) = \cos(x) \mathbb{I}_{x \in [-a,a]}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ (on rappelle que $\mathbb{I}_{x \in A} = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{I}_{x \in A} = 0$ si $x \notin A$).
   (a) Pour $a = \pi/2$, tracer le graphe de la fonction f_a sur $[-4\pi, 4\pi]$ **(0.5 pt)**.
   (b) Si $a = \pi$, donner (en justifiant) le développement en série de Fourier de f_a **(1 pt)**.
   (c) Si $a \neq \pi$, déterminer les coefficients de Fourier de f_a **(2 pts)** et en déduire le développement en série de Fourier de f_a (en justifiant) **(1 pt)**.
   (d) Dans le cas où $a = \pi/2$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
   $$f_a(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{1}{4p^2-1}\cos(2px) \qquad \textbf{(1 pts)}.$$
   En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{1}{4p^2-1}$ **(0.5 pts)**.

2. **(12 points)** Soit $E = \mathbf{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.
   (a) Pour $P \in E$ tel que $P(X) = a_0 + a_1 X$ avec $(a_0, a_1) \in \mathbf{R}^2$, on note $\|P\|_1^2 = a_0^2 + a_1^2$. Montrer que $\|P\|_1$ est une norme associée à un produit scalaire $< \cdot, \cdot >_1$ que l'on précisera **(1 pt)**. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire **(1 pt)**.
   (b) Pour $P \in E$, on note $\|P\|_2 = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Montrer que $\|P\|_2$ est une norme **(1 pt)**.
   (c) Pour $P(X) = a_1 X + a_0$ avec $(a_0, a_1) \in \mathbf{R}^2$, déterminer $\|P\|_2$ en fonction de a_0 et de a_1 **(1.5 pts)**. En déduire que $\| \cdot \|_2$ n'est pas une norme associée à un produit scalaire **(2 pts)**.
   (d) Soit $F = \{\lambda + 2\lambda X, \ \lambda \in \mathbf{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E **(0.5 pts)** et préciser une base orthonormale (pour $< \cdot, \cdot >_1$) de F **(0.5 pts)**.
   (e) Soit $P_0(X) = 1$. Déterminer $\inf_{P \in F} \|P - P_0\|_1$ **(1.5 pts)** puis $\inf_{P \in F} \|P - P_0\|_2$ **(3 pts)**.

3. **(6 points)** Soit $E = \mathbf{R}^2$, $a \in \mathbf{R}$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$, on note $\Phi_a(x) = a(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 x_2$.
   (a) Montrer que Φ_a est une forme quadratique sur E dont on donnera la matrice M_a **(1 pt)**.
   (b) Déterminer la signature de Φ_a **(1.5 pts)** et l'ensemble de ses vecteurs isotropes **(1.5 pts)** en fonction de a. Pour quelles valeurs de a, ϕ_a, forme bilénéaire symétrique associée à Φ_a, est-elle un produit scalaire **(0.5 pts)**?
   (c) Soit P une matrice orthogonale de taille 2 et Φ'_a la forme quadratique de matrice ${}^tPM_aP$. Montrer que Φ'_a a la même signature que Φ_a **(1.5 pts)**.